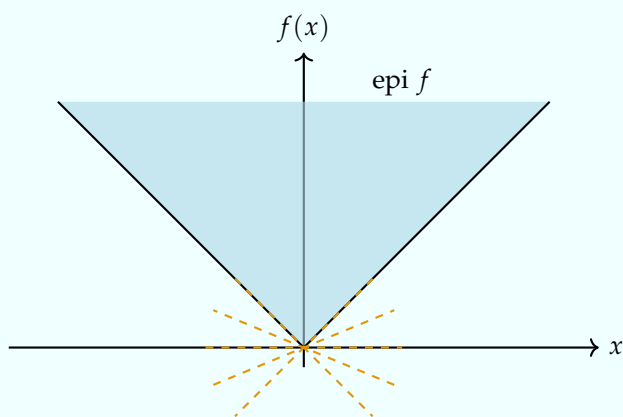


Daniele Castorina, Filippo Cassanello,
Marco Casula & Alessandro Columbu

Il metodo di Alexandrov-Bakelman-Pucci e le sue applicazioni



$$\partial f(0) = [-1, 1]$$

Federico II University Press



fedOA Press

Advanced Topics in Pure and Applied Mathematics:
Doctoral Lecture Series

*Knowledge wants space
and
Books are the space of knowledge*

Direzione editoriale:

Giuseppe Arnone (*Istituto Nazionale di Alta Matematica “Francesco Severi”*),
Giacomo Ascione (*Scuola Superiore Meridionale*),
Carlo Nitsch (*Univ. Napoli Federico II – UniNa*)

Consiglio scientifico:

Florinda Capone (*UniNa*), Salvatore Cuomo (*UniNa*), Paola Festa (*UniNa*),
Davide Franco (*UniNa*), Nicola Fusco (*UniNa*), Marco Lapegna (*UniNa*), Maria
Longobardi (*UniNa*), Eleonora Messina (*UniNa*), Gioconda Moscariello (*UniNa*),
Carmela Musella (*UniNa*), Carlo Nitsch (*UniNa*), Giuseppina Terzo (*UniNa*)
Mladen Savov (*Sofia University*), Brian Straughan (*Durham University*), Paolo
Salani (*Università di Firenze*)

*I contributi originali pubblicati nei volumi di questa collana sono sottoposti a doppia
lettura anonima di esperti (double blind peer review)*

Daniele Castorina, Filippo Cassanello,
Marco Casula & Alessandro Columbu

**Il metodo di
Alexandrov-Bakelman-Pucci
e le sue applicazioni**

Federico II University Press



fedOA Press

Il metodo di Alexandrov-Bakelman-Pucci e le sue applicazioni /
Daniele Castorina, Filippo Cassanello, Marco Casula &
Alessandro Columbu. – Napoli : FedOAPress, 2026. - 52 p. -
(ATPAM-DLS; Advanced Topics in Pure and Applied
Mathematics: Doctoral Lecture Series ; n. 2).

Accesso alla versione elettronica:

<http://www.fedoabooks.unina.it>

ISBN: 978-88-6887-441-4

DOI: 10.6093/978-88-6887-441-4

© 2026 FedOAPress - Federico II University Press
Università degli Studi di Napoli Federico II
Centro di Ateneo per le Biblioteche "Roberto Pettorino"
Piazza Bellini 59-60
80138 Napoli, Italy
<http://www.fedoapress.unina.it/>
Published in Italy
Prima edizione: maggio 2026

Gli E-Book di FedOAPress sono pubblicati con licenza Creative Commons
Attribution 4.0 International

INDICE

Introduzione	1
1 IL PRINCIPIO DEL MASSIMO ED IL LEMMA DI HOPF	3
2 CONDIZIONI SUFFICIENTI PER IL PRINCIPIO DEL MASSIMO	11
3 IL PROBLEMA SOVRADETERMINATO DI SERRIN	15
4 IL TEOREMA DI GIDAS-NI-NIRENBERG	21
5 LA STIMA DI ALEXANDROV-BAKELMAN-PUCCI (ABP)	29
6 LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA	37
7 APPENDICE	45

INTRODUZIONE

La stima classica di Alexandrov-Bakelman-Pucci (o ABP) è una stima uniforme per soluzioni del problema di Dirichlet associato a operatori uniformemente ellittici del secondo ordine con coefficienti misurabili e limitati, scritti non in forma di divergenza. La sua caratteristica principale è quella di essere uno strumento fondamentale nella teoria della regolarità per equazioni ellittiche completamente non lineari. Tuttavia, il metodo ABP è piuttosto generale e può essere adattato a un'ampia varietà di problematiche, come l'ottenimento di un principio di massimo in domini di misura piccola, nonché la semplificazione delle dimostrazioni di diverse disuguaglianze isoperimetriche e di Sobolev.

L'obiettivo di questo corso di dottorato è introdurre in dettaglio il metodo ABP, discutere alcune delle sue generalizzazioni e perfezionamenti e fornire una panoramica dettagliata e completa di tutte le sue applicazioni, evidenziando esplicitamente i miglioramenti derivanti dall'utilizzo di questa tecnica rispetto a strumenti precedenti e più classici.

Il presente testo ripercorre il contenuto del corso di dottorato intitolato "Il metodo di Alexandrov-Bakelman-Pucci e le sue applicazioni" tenuto nel secondo semestre dell'anno accademico 2023-2024, presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni "RENATO CACCIOPOLI" dell'Università degli Studi di Napoli FEDERICO II dal Professor DANIELE CASTORINA, e riproposto nel mese di Luglio 2025 presso il Dipartimento di Matematica ed Informatica dell'Università degli Studi di Cagliari e seguito dagli studenti FILIPPO CASSANELLO, MARCO CASULA E ALESSANDRO COLUMBU che ne hanno riportato i contenuti in questo testo.

Per qualsiasi segnalazione riguardante eventuali errori tipografici si invita a contattare daniele.castorina@unina.it ringraziando anticipatamente per l'interessamento e il contributo fornito.

IL PRINCIPIO DEL MASSIMO ED IL LEMMA DI HOPF

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $L: C^2(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$ tale che

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x)u \quad (1.1)$$

in cui i coefficienti a_{ij}, b_i, c sono funzioni continue, e in particolare $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$ e soddisfano

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2 \quad (1.2)$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, dove $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ sono, rispettivamente, il più piccolo e il più grande autovalore di L .

Come esempio, per l'operatore Δ si ha che $(a_{ij}) = I$, $(b_i) = 0$ e $c = 0$.

Definizione 1.1. L'operatore L si dice:

- *ellittico* in Ω se $\lambda(x) > 0$ per ogni $x \in \Omega$;
- *strettamente ellittico* in Ω se $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ per ogni $x \in \Omega$;
- *uniformemente ellittico* in Ω se è ellittico in Ω e $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ è limitato per ogni $x \in \Omega$;

Osservazione 1.2. Se L è ellittico in Ω , allora è anche strettamente ellittico in ogni sottodominio di Ω .

Teorema 1.3 (Principio del massimo con $c \equiv 0$). Sia L ellittico in Ω limitato. Supponiamo inoltre che $\frac{b_1(x)}{\lambda(x)}$ sia inferiormente limitato e $c(x) \equiv 0$.

($\mathcal{A}_1$) Se $Lu \geq 0$, allora $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$;

($\mathcal{A}_2$) Se $Lu \leq 0$, allora $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$.

Nei casi ($\mathcal{A}_1$) e ($\mathcal{A}_2$) la funzione u si dice, rispettivamente, *sottosoluzione* e *soprasoluzione*.

Dimostrazione. Procediamo a dimostrare $(\mathcal{A}_1)$ (il caso $(\mathcal{A}_2)$ è analogo). Sia $Lu > 0$. Consideriamo $x_0 \in \Omega$ e supponiamo per assurdo che

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u(x).$$

Questo implica che $\nabla u(x_0) = 0$ (vettore nullo) e $D^2 u(x_0) \leq 0$, ottenendo di conseguenza $Lu(x_0) \leq 0$. Nella situazione in cui $Lu \geq 0$, cerchiamo di ricondurci al caso precedente considerando $\varphi(x) = e^{\gamma x_1}$ con $\gamma \gg 1$. Calcoliamo

$$\begin{aligned} L\varphi(x) &= Le^{\gamma x_1} = e^{\gamma x_1}(\gamma^2 a_{11} + \gamma b_1(x)) \geq \lambda(x)\gamma \left(\gamma + \frac{b_1(x)}{\lambda(x)} \right) e^{\gamma x_1} \\ &\geq \lambda(x)\gamma(\gamma + b)e^{\gamma x_1}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le ipotesi

$$a_{11} \geq \lambda(x) \quad \text{e} \quad \frac{b_1(x)}{\lambda(x)} \geq b.$$

Notiamo che se $\gamma > -b$, allora $L\varphi(x) > 0$. Possiamo quindi affermare che $L(u + \varepsilon\varphi) > 0$, con $\varepsilon > 0$, che implica

$$\sup_{\Omega} (u + \varepsilon\varphi) = \sup_{\partial\Omega} (u + \varepsilon\varphi).$$

Facendo tendere $\varepsilon \rightarrow 0$, otteniamo la tesi. $\square$

Alla luce della precedente dimostrazione, notiamo che sarebbe sufficiente supporre la limitatezza del dominio rispetto alla sola direzione x_1 , purché si sappia a priori che u sia limitata superiormente. In ogni caso, l'ipotesi della limitatezza di Ω in almeno una direzione è fondamentale: come controesempio consideriamo

$$\Omega = \{x, y > 0\}, \quad u(x, y) = xy \quad \text{e} \quad Lu = \Delta u.$$

Si ha che $Lu = 0$ ma

$$0 = \sup_{\partial\Omega} u < \sup_{\Omega} u = +\infty.$$

Anche l'ipotesi $c(x) \equiv 0$ non può essere tralasciata: sia infatti

$$u: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{dove} \quad u(x) = \sin x \quad \text{e} \quad Lu = u'' + u.$$

Anche qui si ha che $Lu = 0$ ma

$$0 = \sup_{\partial\Omega} u < \sup_{\Omega} u = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Siano ora $u^+ = \max\{0, u\}$ e $u^- = \min\{0, u\}$. Allora vale il seguente:

Teorema 1.4 (Principio del massimo con $c \neq 0$). Sia L ellittico in Ω limitato. Supponiamo inoltre che $\frac{b_1(x)}{\lambda(x)}$ sia inferiormente limitato e $c(x) \leq 0$.

($\mathcal{B}_1$) Se $Lu \geq 0$, allora $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$;

($\mathcal{B}_2$) Se $Lu \leq 0$, allora $\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$;

($\mathcal{B}_3$) Se $Lu = 0$, allora $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso ($\mathcal{B}_1$) (il caso ($\mathcal{B}_2$) è analogo e ($\mathcal{B}_3$) è l'unione dei due precedenti). Consideriamo $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ e supponiamo che $\Omega^+ \neq \emptyset$: se così non fosse si avrebbe $u < 0$ in Ω ed $u^+ = 0$ su $\partial\Omega$ che darebbe $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$. Se $Lu \geq 0$, definiamo

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u \geq -c(x)u.$$

Vale quindi ($\mathcal{A}_1$) in Ω^+ :

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega^+} u = \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

□

Un esempio in cui vale la disuguaglianza stretta è il seguente: sia

$$u(x) = -1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{in } [-1, 1] \quad \text{e} \quad Lu = u'' - u.$$

Si ha che $Lu \geq 0$ in $[-1, 1]$ e

$$-1 = \sup_{[-1,1]} u < \sup_{x=\pm 1} u^+ = 0.$$

Corollario 1.5 (Unicità del problema di Dirichlet). Sotto le ipotesi del Teorema 1.4, se

$$\begin{cases} Lu = Lv & \text{in } \Omega, \\ u = v & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

allora $u(x) \equiv v(x)$ in Ω .

Dimostrazione. Si applica ($\mathcal{B}_3$) a $w = u - v$.

□

La seguente definizione ci servirà per enunciare il Lemma 1.8.

Definizione 1.6 (Condizione della sfera interna in x_0). Diciamo che Ω soddisfa la *condizione della sfera interna in $x_0 \in \partial\Omega$* se esiste $B_R(y) \subset \Omega$ tale che $\partial\Omega \cap \partial B_R(y) = \{x_0\}$.

Osservazione 1.7. Se $\partial\Omega$ è di classe C^2 , allora la condizione della sfera interna è soddisfatta in ogni punto $x_0 \in \partial\Omega$. Si dimostra, inoltre, che un dominio verifica la condizione di sfera interna (ed esterna) se e solo se il suo bordo è di classe $C^{1,1}$ (si veda per esempio [12]). Per quanto riguarda regolarità più deboli, purtroppo non è possibile trarre conclusioni generali. Come esempi possiamo considerare:

- la parte interna di una cardioide di equazione $\rho = 1 + \cos t$, con $t \in [0, 2\pi]$: la condizione della sfera interna è soddisfatta anche nel punto di cuspidè $(0,0)$ (basta considerare la palla $B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, 0)$), ma la curva non è nemmeno di classe C^1 ;
- l'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x|^{1+\alpha}\}$, $\alpha \in (0, 1)$: il suo bordo è di classe $C^{1,\alpha}$, ma per qualsiasi raggio $r > 0$ la palla $B_r(0, r)$ non è contenuta in Ω . Infatti, il bordo inferiore della palla è dato da $y = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ e per $x \rightarrow 0$ si ha lo sviluppo

$$r - \sqrt{r^2 - x^2} \sim \frac{x^2}{2r} = o(|x|^{1+\alpha}),$$

in quanto $1 + \alpha < 2$. Ne segue che, per x sufficientemente piccolo,

$$r - \sqrt{r^2 - x^2} < |x|^{1+\alpha},$$

e quindi la palla non è contenuta in Ω .

Grazie al Principio di Massimo possiamo dimostrare il seguente celebre Lemma dovuto a Eberhard Hopf.

Lemma 1.8 (Hopf). Sia $Lu \geq 0$ con L uniformemente ellittico, $\frac{b_i(x)}{\lambda(x)}$ superiormente limitato per ogni $i = 1, \dots, n$ e $c(x) = 0$. Supponiamo che:

- Ω soddisfi la condizione di sfera interna in $x_0 \in \partial\Omega$;
- $u(x)$ sia continua in x_0 ;
- esista $\delta > 0$ tale che $u(x) < u(x_0)$ in $B_\delta(x_0) \cap \Omega$.

Allora, se esiste, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, dove ν è la normale esterna a Ω . Tale conclusione continua a valere se $c(x) \leq 0$ con $\frac{c(x)}{\lambda(x)} \leq c$ e $u(x_0) \geq 0$ oppure se $c(x)$ è di segno qualunque e $u(x_0) = 0$.

Osservazione 1.9. Se nelle ipotesi troviamo $Lu \leq 0$ e $u(x) > u(x_0)$ in $B_\delta(x_0) \cap \Omega$, allora chiaramente vale $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$;

Dimostrazione del Lemma di Hopf. Siccome Ω soddisfa la condizione della sfera interna, esiste $R > 0$ tale che $B_R(y) \subset \Omega$ e $\partial\Omega \cap \partial B_R(y) = \{x_0\}$. Per ogni $\rho \in (0, R)$ definiamo $v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2}$, dove $r = |x - y| > \rho$ e $\alpha \gg 1$. Supponendo che $c \leq 0$, calcoliamo ora

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha r^2} \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)(x_i - y_i)(x_j - y_j) \right. \\ &\quad \left. - 2\alpha \sum_{i=1}^n (a_{ii}(x) + b_i(x)(x_i - y_i)) \right] + c(x)v(x) \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \left[4\alpha^2 \lambda(x)r^2 - 2\alpha(\Lambda(x) + \lambda(x)br) + c(x) \right] \\ &\geq e^{-\alpha r^2} \lambda(x) \left[4\alpha^2 r^2 - 2\alpha \left(\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} + br \right) + c \right] \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

in $B_R(y) \setminus B_\rho(y)$ per α abbastanza grande, dove abbiamo usato $\frac{b_i(x)}{\lambda(x)} \leq b$ e che $\frac{c(x)}{\lambda(x)} \leq c$. Consideriamo $w(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon v(x)$: poiché $u(x) < u(x_0)$ su $\partial B_\rho(y)$, scegliamo ε abbastanza piccolo in modo da avere $w(x) \leq 0$ su $\partial B_\rho(y)$. Inoltre, dato che $v = 0$ quando $r = R$, abbiamo che $w(x) \leq 0$ anche su $\partial B_R(y)$ e

$$Lw(x) = Lu(x) + \varepsilon Lv(x) - c(x)u(x_0) \geq -c(x)u(x_0),$$

perché $Lu(x) \geq 0$, $\varepsilon Lv(x) \geq 0$. A questo punto, sia se $c(x) \equiv 0$ oppure se $c(x) \leq 0$ con $u(x_0) \geq 0$, si ottiene che $Lw(x) \geq 0$.

Di conseguenza, per $(\mathcal{A}_1)$ (se $c(x) \equiv 0$) o $(\mathcal{B}_1)$ (se $c(x) \leq 0$) si ha che $w(x) \leq 0$ in $B_R(y) \setminus B_\rho(y)$. Perciò

$$0 \leq \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0),$$

che implica

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \varepsilon 2\alpha R e^{-\alpha R^2} > 0.$$

Infine, nel caso che c sia di segno qualunque ma $u(x_0) = 0$, basta sostituire ad L l'operatore $L - c^+$ nelle stime precedenti per ottenere la medesima tesi. $\square$

Il Principio di Massimo classico garantisce la non negatività (non positività) delle soluzioni, ma spesso tale informazione non è sufficiente e si necessita di una stretta positività (negatività) che può essere ottenuta, come corollario del Lemma di Hopf, grazie al seguente Principio di Massimo Forte (di seguito *PMF*).

Teorema 1.10 (Principio del Massimo Forte). Sia Ω connesso ed L uniformemente ellittico, $c(x) \equiv 0$ e $Lu(x) \geq 0$ ($Lu(x) \leq 0$). Se u raggiunge il massimo (minimo) in Ω , allora u è costante. Nel caso in cui $c(x) \leq 0$ e $\frac{c}{\lambda}$ è limitato, u non può assumere un massimo positivo (o un minimo negativo) a meno che non sia costante.

Osservazione 1.11. Chiaramente, se $c(x) < 0$ in qualche punto allora necessariamente la costante del teorema è 0. Inoltre, se $u = 0$ in un massimo o un minimo interno, segue dalla dimostrazione che $u \equiv 0$ qualsiasi sia il segno di $c(x)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u non sia costante e che quindi assuma il suo massimo $M \geq 0$. Definiamo allora $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < M\} \subset \Omega$ ed osserviamo che dalla connessione del dominio segue che $\partial\Omega^- \cap \Omega \neq \emptyset$. Scegliamo $x_0 \in \Omega^-$ tale che $d(x_0, \partial\Omega^-) > d(x_0, \partial\Omega)$ e consideriamo la più grande palla $B(x_0) \subset \Omega^-$. Esiste quindi un $y \in \partial B(x_0)$ tale che $u(y) = M$ mentre $u < M$ in $B(x_0)$. Dal precedente Lemma 1.8 si avrebbe che $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) > 0$, che è assurdo perché $\nabla u(y) = 0$ essendo y un punto di massimo. Perciò u è costante. $\square$

Sarebbe auspicabile, vista la possibile mancanza di regolarità della soluzione e/o del dominio, dimostrare il *PMF* senza ricorrere al Lemma di Hopf. Ciò è reso possibile dalle *Disuguaglianze di Harnack deboli* per sopra/sotto soluzioni.

Ad esempio, se $u \geq 0$ in Ω verifica $Lu \geq 0$ in Ω , per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono una costante $C > 0$ ed un piccolo $\delta > 0$ tali che

$$\inf_{B_\delta(x_0)} u \geq C \int_{B_{2\delta}(x_0)} u \quad (1.3)$$

In particolare, se $u(x_0) = 0$ allora avremmo $u \equiv 0$ in $B_{2\delta}(x_0)$. Quindi il luogo di zeri di u , che è chiuso vista la continuità, sarebbe anche

aperto grazie alla (1.3); da cui, data la connessione del dominio, abbiamo che u è strettamente positiva oppure è identicamente nulla, cioè esattamente il *PMF*.

Tuttavia, la dimostrazione della (1.3) è laboriosa e fa uso dello schema iterativo alla De Giorgi-Nash-Moser: per maggiori dettagli si veda [9, Teoremi 8.17 e 8.18].

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER IL PRINCIPIO DEL MASSIMO

Sia

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{ij} u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i u + c(x)u.$$

Definizione 2.1. L soddisfa il Principio del Massimo (PM) in Ω se

$$Lu \geq 0 \text{ in } \Omega \quad \text{e} \quad u \leq 0 \text{ su } \partial\Omega \quad \Rightarrow \quad u \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Quali condizioni deve soddisfare il termine $c(x)$ affinché valga il PM? Innanzitutto vediamo il seguente:

Controesempio.

Sia Ω un aperto limitato con bordo regolare. Consideriamo $L = \Delta$ ed il suo primo autovalore dato da

$$\lambda_1(-\Delta, \Omega) = \inf_{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\int_{\Omega} u^2},$$

dove $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Consideriamo quindi $L_1 = \Delta + \lambda_2$, dove λ_2 è il secondo autovalore di $-\Delta$. Allora:

Proposizione 2.2. L_1 non verifica il PM.

Dimostrazione. Se l'autofunzione φ_2 soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2 & \text{in } \Omega, \\ \varphi_2 = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

allora

$$\begin{aligned} \lambda_2 \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 &= - \int_{\Omega} \varphi_1 \Delta \varphi_2 = \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 = - \int_{\Omega} \Delta \varphi_1 \varphi_2 \\ &= \lambda_1 \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2. \end{aligned}$$

Dal passaggio precedente si deduce che

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{\Omega} \varphi_1 \varphi_2 = 0,$$

e, unito al fatto che $\lambda_2 > \lambda_1$ e alla positività di φ_1 grazie al Teorema 7.1, questo implica che φ_2 cambi segno e quindi, su $\partial\Omega$, non è detto che si raggiunga il massimo o il minimo. $\square$

Sia ora $\tilde{L} = \Delta + c(x)$ e

$$\lambda_1(-\tilde{L}, \Omega) = \inf_{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - c(x)u^2}{\int_{\Omega} u^2}.$$

Allora vale la seguente:

Proposizione 2.3. Se $\lambda_1(-\tilde{L}, \Omega) > 0$, allora $\tilde{L} = \Delta + c(x)$ soddisfa il PM.

Dimostrazione. Sia u tale che $\tilde{L}u = \Delta u + c(x)u \geq 0$ in Ω e $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Consideriamo $u^+ = \max\{u, 0\}$: vogliamo mostrare che $u^+ \equiv 0$. Innanzitutto, grazie al Teorema 7.2 sappiamo che $u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Inoltre

$$(-\Delta u - c(x)u)u^+ \leq 0;$$

integrando su Ω otteniamo (usando ancora il Teorema 7.2)

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} (-\Delta u - c(x)u)u^+ = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u^+ - c(x)uu^+ \\ &= \int_{\Omega^+} |\nabla u^+|^2 - c(x)(u^+)^2 \geq \lambda_1(-\tilde{L}, \Omega^+) \int_{\Omega^+} (u^+)^2 \\ &\geq \lambda_1(-\tilde{L}, \Omega) \int_{\Omega} (u^+)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

che implica $u^+ \equiv 0$. $\square$

Osservazione 2.4. Il viceversa della Proposizione 2.3 non è vero in generale. È vero però che se un operatore L soddisfa il PM allora $\lambda_1(-L, \Omega) \geq 0$ (non necessariamente col maggiore stretto).

Osservazione 2.5. Se $c(x) \leq 0$ in Ω , è ovvio che $\lambda_1(-\Delta - c(x), \Omega) \geq \lambda_1(-\Delta, \Omega) > 0$, quindi $\tilde{L}$ verifica il PM. Però può ancora valere il PM anche se $c(x)$ è positivo da qualche parte: l'importante è che la sua parte positiva non sia "troppo grande" cioè

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 - c(x)u^2}{\int_{\Omega} u^2} &\geq \lambda_1(-\Delta, \Omega) - \frac{\int_{\Omega} c^+(x)u^2}{\int_{\Omega} u^2} \\ &\geq \lambda_1(-\Delta, \Omega) - \|c^+(x)\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Perciò, la Proposizione 2.3 vale se $\|c^+(x)\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1(-\Delta, \Omega)$.

Introduciamo ora la miglior costante della disuguaglianza di Sobolev, ovvero

$$S = \inf_{H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2}{\left(\int_{\Omega} |u|^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2n}}}.$$

Vedremo ora come non sia necessario che c^+ sia piccola in norma uniforme ma è sufficiente non sia troppo grande in norma $L^{\frac{n}{2}}$.

Proposizione 2.6 (Grossi–Molle [10]). Se $\|c(x)\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)} < S$, allora $L = \Delta + c(x)$ verifica il PM.

Dimostrazione. Supponiamo che, per assurdo, L non verifichi il PM. Esiste quindi $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \not\equiv 0$, tale che $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 - c(x)w^2 \leq 0$. Allora, dalla disuguaglianze di Hölder e di Sobolev si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 &\leq \int_{\Omega} c(x)w^2 \leq \left(\int_{\Omega} c(x)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Omega} w^{\frac{2n}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\leq \frac{\|c(x)\|_{L^{\frac{n}{2}}(\Omega)}^{\frac{n}{2}}}{S} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 < \int_{\Omega} |\nabla w|^2, \end{aligned}$$

che è chiaramente una contraddizione a meno che $w \equiv 0$. $\square$

Passiamo infine ad una delle condizioni più classiche per la validità del PM per operatori L più generici, come per esempio l'esistenza di una soprasoluzione strettamente positiva nella chiusura del dominio.

Proposizione 2.7. Se esiste $g > 0$ su $\overline{\Omega}$ tale che $Lg \leq 0$, allora L soddisfa il PM.

Dimostrazione. Sia u tale che $Lu \geq 0$ in Ω e $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Consideriamo $v := \frac{u}{g}$: questo implica che

$$v \leq 0 \quad \text{su } \partial\Omega. \quad (2.1)$$

Si verifica

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} u + \sum_i b_i \partial_i u + c(x)u \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij} (gv) + \sum_i b_i \partial_i (gv) + c(x)gv \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} ((\partial_{ij} g)v + (\partial_i g)(\partial_j v) + (\partial_j g)(\partial_i v) + g(\partial_{ij} v)) \\
&\quad + \sum_i b_i ((\partial_i g)v + g(\partial_i v)) + c(x)gv \\
&= L_1 v + v L g = (L_1 + \hat{c}(x))v = L_2 v,
\end{aligned}$$

dove L_2 è formato da un operatore ellittico senza termine $\hat{c}(x)$ (i.e. L_1) e dal termine $\hat{c}(x) = Lg \leq 0$. La disuguaglianza $L_2 v \geq 0$, insieme a (2.1), implica che vale il PM per L_2 e perciò $v \leq 0$ in Ω , cioè $u \leq 0$ in Ω . $\square$

Grazie alla condizione sopra è possibile dimostrare il PM in domini stretti.

Proposizione 2.8 (PM nei domini stretti). Siano m, b, c_1 tali che $a_{11} \geq m > 0$, $b_1 \geq -b$ e $c \leq c_1$. Sia inoltre $\overline{\Omega} \subset \{a - \varepsilon < x_1 < a\}$. Allora se

$$c_1 e^{\frac{2b\varepsilon}{m}} \leq c_1 + \frac{2b^2}{m},$$

L verifica il PM.

Dimostrazione. Definiamo $\alpha = \frac{2b}{m}$ e $g := e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1} > 0$ in $\overline{\Omega}$. Se mostriamo che g è una soprasoluzione (cioè che $Lg \leq 0$), allora, per la Proposizione 2.7, L verifica il PM. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
Lg &= -a_{11}\alpha^2 e^{\alpha x_1} - b_1 \alpha e^{\alpha x_1} + c(e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1}) \\
&\leq (b\alpha - m\alpha^2)e^{\alpha x_1} + c_1(e^{\alpha a} - e^{\alpha x_1}).
\end{aligned}$$

Questo implica che

$$e^{-\alpha x_1} Lg \leq b\alpha - m\alpha^2 + c_1(e^{\alpha\varepsilon} - 1) \leq \frac{2b^2}{m} - \frac{4mb^2}{m^2} + c_1 \left(e^{\frac{2b\varepsilon}{m}} - 1 \right) \leq 0.$$

$\square$

IL PROBLEMA SOVRADETERMINATO DI SERRIN

Consideriamo il problema di torsione di Saint Venant:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

in cui Ω è connesso, limitato e $\partial\Omega \in C^2$. Per il Teorema 1.10 si ha che $u > 0$ in Ω . Il problema (3.1) è sempre ben posto: infatti, definendo $E : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$E(u) = \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} - u, \quad E'[u](v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - v = 0,$$

se mostriamo che il funzionale ha un punto critico, quest'ultimo sarà la soluzione del problema. Innanzitutto notiamo che

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} - u \geq \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} - |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^2}{2} + \lambda_1^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

cioè E è inferiormente limitato, e inoltre $E \rightarrow +\infty$ se $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow +\infty$. Di conseguenza, grazie ai metodi diretti del Calcolo delle Variazioni, esiste un'unica soluzione del problema.

Se al problema (3.1) aggiungiamo una condizione di Neumann, otteniamo il seguente problema sovradeterminato:

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = c & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

Teorema 3.1 (Serrin). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, limitato, connesso e con $\partial\Omega \in C^2$. Allora, se u è soluzione di (3.2), si ha che $\Omega = B_R(0)$ e

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2n}.$$

Osservazione 3.2. Prima di dimostrare il teorema appena enunciato, facciamo una premessa sui punti del bordo di Ω .

Quali sono le giuste condizioni sul dominio per avere un unico punto di contatto tramite il metodo di spostamento di iperpiani (MMP)? Citiamo qui la risposta del Prof. Francesco Polizzi dell'Università di Napoli, che ringraziamo.

Se il bordo dell'insieme convesso C è di classe C^1 in un punto P , allora l'iperpiano tangente (che esiste) è l'unico iperpiano di supporto. In altre parole, l'iperpiano tangente lascia C "tutto da una parte" (ed è l'unico iperpiano per P avente questa proprietà). Si veda a tal proposito il seguente [link¹](#).

Inoltre, i punti di tangenza si trovano con un procedimento di ottimizzazione lineare (sono i minimi del funzionale definito dal piano tangente, che vale zero nei punti di contatto ed è strettamente positivo sul resto di C , per quanto detto sopra). Ma ora la stretta convessità di C ti dice che ogni funzionale lineare ha un unico minimo su C (si veda il seguente [link²](#)).

Quindi, se C è un compatto strettamente convesso dello spazio euclideo, con bordo di classe C^1 , dato un punto P del suo bordo, l'iperpiano tangente in P , che coincide con l'unico iperpiano di supporto in P , interseca C solo in P . Tra l'altro, il funzionale ha anche un unico massimo, il che garantisce che si può traslare quell'iperpiano parallelamente a se stesso rendendolo tangente ad esattamente un altro punto di C .

Insomma, la mappa di Gauss del bordo di C (che prende un punto e gli associa il vettore normale) è iniettiva, e inoltre se esiste un punto (necessariamente unico) con vettore normale N ne esiste anche uno (necessariamente unico) con vettore normale $-N$.

Dimostrazione. Metodo 1 (Spostamento di iperpiani).

Fissiamo la notazione che verrà usata anche nei capitoli successivi: denotiamo

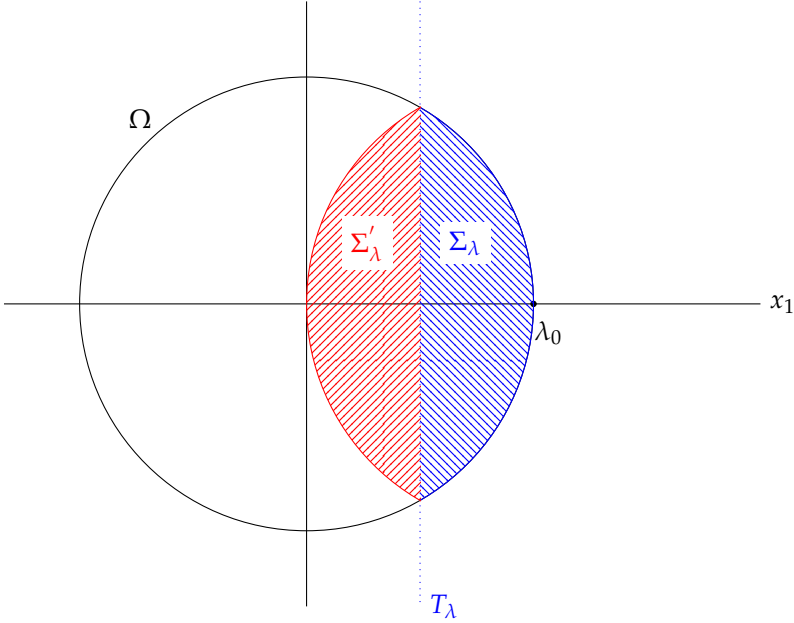
- $x = (x_1, x')$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$;
- $T_\lambda = \{x_1 = \lambda\}$ l'iperpiano di equazione $x_1 = \lambda$;
- $x_\lambda = (2\lambda - x_1, x')$ il simmetrico di x rispetto a T_λ ;

¹ <https://mathoverflow.net/questions/265755/when-will-the-supporting-hyperplane-of-a-convex-set-coincide-with-the-tangent>

² <https://math.stackexchange.com/questions/583339/minimizing-a-linear-function-on-a-strictly-convex-set>

- $\Sigma_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 > \lambda\}$;
- $\Sigma'_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : x_\lambda \in \Sigma_\lambda\}$ il simmetrico di Σ_λ rispetto a T_λ ;
- $u_\lambda(x) = u(x_\lambda) = u(2\lambda - x_1, x')$;
- $\lambda_0 = \max_{\Omega} x_1$.

Se $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ con ε abbastanza piccolo, si ha che $\Sigma'_\lambda \subset \Omega$.



Perciò $u_\lambda(x)$ verifica le seguenti proprietà:

- ▷ $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(x) = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(2\lambda - x_1, x') = -\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_\lambda)$;
- ▷ $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(2\lambda - x_1, x') = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_\lambda)$ per ogni $i = 2, \dots, n$;
- ▷ $\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial x_i^2}(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_\lambda)$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Queste, unite al fatto che $\nu'_1 = -\nu_1$ e $\nu'_j = \nu_j$ per ogni $j = 2, \dots, n$, dove ν e ν' sono rispettivamente le normali esterne a $\partial\Sigma_\lambda$ e $\partial\Sigma'_\lambda$, implicano

$$\Delta u_\lambda(x) = \Delta u(x_\lambda) \quad \text{e} \quad \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu'}(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_\lambda).$$

Perciò la funzione $u_\lambda(x)$ soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta u_\lambda = 1 & \text{in } \Sigma'_\lambda, \\ u_\lambda = u & \text{su } T_\lambda, \\ u_\lambda = 0 & \text{su } \partial\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda, \\ \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu'} = c & \text{su } \partial\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda. \end{cases}$$

Definiamo ora $w_\lambda(x) = u(x) - u_\lambda(x)$ in Σ'_λ : si ha che $w_\lambda(x)$ soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda = 0 & \text{in } \Sigma'_\lambda, \\ w_\lambda = 0 & \text{su } T_\lambda, \\ w_\lambda \geq 0 & \text{su } \partial\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda. \end{cases}$$

Per il PMF (Teorema 1.10) si possono verificare due condizioni:

1. $w_\lambda \equiv 0$ in Σ'_λ ;
2. $w_\lambda > 0$ in Σ'_λ .

Supponiamo per assurdo che $w_\lambda > 0$ in Σ'_λ e che, a un certo punto, $\partial\Sigma'_\lambda$ sia tangente internamente a $\partial\Omega$ in $P \in \partial\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda$: questo significa che $w_\lambda(P) = 0$. Inoltre, siccome $w_\lambda > 0$ in Σ'_λ , per il Lemma 1.8, si ha $\frac{\partial w_\lambda}{\partial \nu}(P) < 0$, e questo è assurdo poiché $\frac{\partial w_\lambda}{\partial \nu}(P) = 0$.

Se, al contrario, $\partial\Sigma'_\lambda$ è tangente internamente a $\partial\Omega$ in $Q \in \partial\Sigma'_\lambda \cap T_\lambda$, allora $w_\lambda(Q) = 0$, $\frac{\partial w_\lambda}{\partial s}(Q) = 0$ e $\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial s^2}(Q) = 0$ per ogni vettore s entrante. Utilizzando il Lemma 7.3 concludiamo che $w_\lambda \equiv 0$ e, di conseguenza, $u_\lambda \equiv u$, cioè Ω è simmetrico.

Metodo 2 (Weinberger).

Avremo bisogno della classica

Lemma 3.3 (Identità di Pohozaev). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e limitato, con $\partial\Omega \in C^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ continua e sia u soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia inoltre $F(u) = \int_0^u f(t) dt$ e ν la normale esterna su $\partial\Omega$. Allora

$$n \int_\Omega F(u) - \frac{n-2}{2} \int_\Omega f(u)u = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 x \cdot \nu.$$

Dimostrazione. Basta semplicemente osservare, come nel libro di Struwe [15], che vale la seguente identità

$$\begin{aligned} 0 &= (\Delta u + f(u))(x \cdot \nabla u) \\ &= \operatorname{div}(\nabla u(x \cdot \nabla u)) - |\nabla u|^2 - x \cdot \nabla \frac{|\nabla u|^2}{2} + x \cdot \nabla F(u), \end{aligned}$$

che una volta integrata su Ω , applicando il Teorema della divergenza e notando che $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu = \nabla u \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = |\nabla u|$ visto che $u > 0$ in Ω ed $u = 0$ su $\partial\Omega$, restituisce l'identità cercata. $\square$

Utilizzando il Lemma 3.3 con $f(u) = 1$ e, di conseguenza, $F(u) = u$, otteniamo

$$n \int_{\Omega} u - \frac{n-2}{2} \int_{\Omega} u = \frac{c^2}{2} \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu.$$

Ora, utilizzando il Teorema della divergenza, l'identità diventa

$$\frac{n+2}{n} \int_{\Omega} u = c^2 |\Omega|. \quad (3.3)$$

D'altra parte, l'equazione $\Delta u = -1$ implica

$$1 = (\Delta u)^2 = \left(\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n (u_{x_i x_i})^2 \leq n \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j})^2. \quad (3.4)$$

Definiamo $v := |\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u$ e osserviamo che, grazie alla (3.4),

$$\Delta v = \Delta \left(|\nabla u|^2 + \frac{2}{n}u \right) = 2 \sum_{i,j=1}^n (u_{x_i x_j})^2 - \frac{2}{n} \geq 0, \quad (3.5)$$

e inoltre

$$v|_{\partial\Omega} = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \equiv c^2. \quad (3.6)$$

La (3.5) e la (3.6), insieme al Teorema 1.10, implicano che $v \equiv c^2$ in Ω oppure $v < c^2$ in Ω . Supponiamo che $v < c^2$ in Ω : si ha che

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = - \int_{\Omega} u \Delta u = \int_{\Omega} u,$$

che implica

$$\left(1 + \frac{2}{n} \right) \int_{\Omega} u = \int_{\Omega} v < c^2 |\Omega|,$$

che è chiaramente in contraddizione con la (3.3). Concludiamo perciò che $v \equiv c^2$ in Ω e, conseguentemente, $\Delta v = 0$ in Ω . Sempre dalla (3.4) si deduce

$$\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 = \frac{1}{n}, \quad \text{cioè} \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 = \frac{1}{n^2},$$

che implica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{n} \delta_{ij}.$$

Da quest'ultima relazione si deduce che

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2n},$$

e, dal momento che $u|_{\partial\Omega} = 0$, si ha che $|x| = R$ su $\partial\Omega$, ovvero $\Omega = B_R(0)$. $\square$

IL TEOREMA DI GIDAS–NI–NIRENBERG

In questo capitolo dimostreremo il seguente:

Teorema 4.1 (Gidas–Ni–Nirenberg). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dominio simmetrico e convesso nella direzione x_1 e con $\partial\Omega \in C^2$. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

dove $f \in C^1$. Allora u è simmetrica e decrescente in x_1 , cioè

$$u(x_1, x') = u(-x_1, x') \quad \text{e} \quad u_{x_1} < 0 \quad \text{se} \quad x_1 > 0.$$

Per dimostrarlo, necessitiamo di alcune premesse. Utilizzando la stessa notazione della dimostrazione del Teorema 3.1, la prima cosa che vogliamo provare è la seguente:

Proposizione 4.2. Siano $\lambda_0 = \max_{\Omega} x_1$, $\Sigma_\lambda = \{x \in \Omega : x_1 > \lambda\}$ e $\Sigma'_\lambda = \{x \in \Omega : x_\lambda \in \Sigma_\lambda\}$ il simmetrico di Σ_λ rispetto al piano di equazione $x_1 = \lambda$. Allora

$$\Sigma'_\lambda \subset \Omega \quad \text{se} \quad \lambda \sim \lambda_0,$$

cioè la riflessione di Σ_λ è interamente contenuta in Ω se λ è abbastanza vicino a λ_0 .

Dimostrazione. Sia $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$ tale che $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\}$, $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\}$ e $\nabla F|_{\partial\Omega} \neq 0$: possiamo quindi definire $v(x) = \frac{\nabla F(x)}{|\nabla F(x)|}$. Vogliamo mostrare che preso $x \in \Sigma_\lambda$, si ha che $F(x_\lambda) > 0$.

Supponiamo che esista una successione $\lambda^k \rightarrow \lambda_0$ tale che esiste $x^k \in \Sigma_{\lambda^k}$ ma $x_{\lambda^k}^k \notin \Omega$: questo implica che $F(x^k) > 0$, $x_1^k > \lambda^k$ e $F(2\lambda^k - x_1^k, x'^k) \leq 0$. Applicando Lagrange rispetto a x_1 , si ha:

$$0 < \frac{F(x_1^k, x'^k) - F(2\lambda^k - x_1^k, x'^k)}{x_1^k - (2\lambda^k - x_1^k)} = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\xi^k, x'^k),$$

dove $\zeta^k \in (2\lambda^k - x_1^k, x_1^k)$. A meno di sottosuccessioni, si verifica che $x^k \rightarrow P \in T_{\lambda_0} \cap \overline{\Omega}$, che sarà l'unico punto di contatto (cfr. Osservazione 3.2). Siccome $\lambda^k \rightarrow \lambda_0$, allora $x_1^k \rightarrow \lambda_0$ e $\zeta^k \rightarrow \lambda_0$ e, per continuità delle derivate parziali di F ($F \in C^2$ per ipotesi)

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \lim_{\lambda^k \rightarrow \lambda_0} \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_1}(\zeta^k, x^k)}_{>0} \geq 0$$

otteniamo un assurdo in quanto per costruzione il versore normale $\nu(x)$ è entrante nei punti del bordo, cioè soddisfa

$$\nu(P) = \frac{\nabla F(P)}{|\nabla F(P)|} = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(P), 0, \dots, 0\right)}{|\nabla F(P)|} \implies \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) < 0$$

che dà una contraddizione. $\square$

Proposizione 4.3. La riflessione resta nel dominio, cioè $\Sigma'_\lambda \subset \Omega$, fino a che:

1. Σ'_λ è tangente internamente a $\partial\Omega$ in un punto $P \notin T_\lambda$;
2. $T_\lambda \perp \partial\Omega$ in qualche punto $Q \in \partial\Omega$.

Lemma 4.4. Sia $x_0 \in \partial\Omega$, $\nu_1(x_0) > 0$ (prima componente della normale) e $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap B_\varepsilon(x_0)$. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che $-\Delta u = f(u)$ in Ω , $u > 0$ in Ω e $u = 0$ su $S = \partial\Omega \cap B_\varepsilon(x_0)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ in $\Omega \cap B_\delta(x_0)$.

Dimostrazione. Innanzitutto si ha che $\frac{\partial u}{\partial x_1} \leq 0$ su S : infatti se $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$, allora $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu$ e, di conseguenza, $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu_1$. Dal momento che $\nu_1(x_0) > 0$, esiste un intorno U di x_0 in cui $\nu_1(x) > 0$ per ogni $x \in U$ e, siccome $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0$, allora $\frac{\partial u}{\partial x_1} \leq 0$ su S . Supponiamo per assurdo che esista $x^k \rightarrow x_0$ tale che $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x^k) \geq 0$. Per Lagrange si ha

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = 0. \quad (4.2)$$

Non possiamo applicare il Lemma 1.8 poiché l'operatore che stiamo considerando non è lineare, però possiamo riscriverlo in questa maniera:

$$\Delta u + f(u) = \Delta u + \frac{f(u) - f(0)}{u} u + f(0) = \Delta u + c(x)u + f(0).$$

Se $f(0) \geq 0$ allora u soddisfa

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u \leq 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u > 0 & \text{in } \Omega_\varepsilon, \\ u = 0 & \text{su } S, \end{cases}$$

e possiamo quindi applicare il Lemma 1.8, che ci garantisce $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$, che è in contraddizione con la (4.2). Se, di contro, $f(0) < 0$, allora $\Delta u(x_0) + f(u(x_0)) = 0$ implica

$$\Delta u(x_0) = -f(0) > 0, \quad (4.3)$$

e, sempre in x_0 , abbiamo

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)v_1(x_0).$$

Dato che per ipotesi $v_1(x_0) > 0$, deve essere necessariamente $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = 0$, che implica

$$\nabla u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)v(x_0) = 0.$$

Vediamo ora la struttura della matrice hessiana $H_u(x_0)$. Sia τ un vettore unitario tangente a S in x_0 . Poiché u è costante in S , la sua derivata direzionale lungo τ è nulla in ogni punto della frontiera vicino a x_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x) = 0, \quad \forall x \in S.$$

Se deriviamo ulteriormente questa espressione rispetto a un'altra direzione tangente σ , otteniamo la derivata seconda tangenziale:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma \partial \tau}(x_0) = 0.$$

Quindi, la restrizione dell'operatore $H_u(x_0)$ allo spazio tangente è nulla, cioè tutti i vettori tangenti appartengono all'autospazio relativo all'autovalore 0 e, di conseguenza, $n - 1$ autovalori sono nulli. Rimane solamente l'autovettore ν (ortogonale allo spazio tangente), relativo all'autovalore η . Formalmente, $H_u(x_0) = \eta \nu \nu^T$, cioè

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \eta v_i(x_0)v_j(x_0). \quad (4.4)$$

Inoltre, si verifica che $\eta > 0$: infatti, dalle relazioni (4.3) e (4.4), otteniamo

$$0 < \Delta u(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) = \sum_{i=1}^n \eta v_i^2 = \eta \sum_{i=1}^n v_i^2 = \eta,$$

Quest'ultima, unita a (4.2) e (4.4), ci garantisce che

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) = \Delta u(x_0) v_1^2(x_0) = -f(0) v_1^2(x_0) > 0,$$

che risulta essere una contraddizione. Per cui esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ in $\Omega \cap B_\delta(x_0)$. $\square$

Lemma 4.5. Supponiamo che u sia una soluzione del problema (4.1) e sia $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_0$ tale che $\frac{\partial u}{\partial x_1} \leq 0$ e $u(x) \leq u(x_\lambda)$ ma $u(x) \neq u(x_\lambda)$ in Σ_λ . Allora $u(x) < u(x_\lambda)$ in Σ_λ e $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ in $\Omega \cap T_\lambda$.

Dimostrazione. Sia $x \in \Sigma'_\lambda$, $x_\lambda \in \Sigma_\lambda$ e sia inoltre $v(x) = u(x_\lambda)$. Si ha, innanzitutto, che $-\Delta v(x) = f(v(x))$. Posto $w(x) = v(x) - u(x)$ in Σ'_λ , otteniamo

$$-\Delta w = \Delta(u - v) = f(v) - f(u) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u} w = c_\lambda w.$$

Per ipotesi si verifica che $w(x) = v(x) - u(x) \geq 0$ in Σ_λ , e di conseguenza $w \leq 0$ in Σ'_λ e $w|_{T_\lambda} \equiv 0$. Inoltre $w|_{\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda} \leq 0$ e, osservando che $\Sigma'_\lambda \setminus T_\lambda$ è connesso, per il PMF (Teorema 1.10 e Osservazione 1.11) si ha che $w < 0$ in Σ'_λ . Applicando il Lemma 1.8 otteniamo

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -2 \frac{\partial u}{\partial x_1} > 0 \quad \implies \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0.$$

$\square$

Dimostrazione del Teorema 4.1

Sia $\lambda \sim \lambda_0$: allora $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ e $u(x) < u(x_\lambda)$.

Siano inoltre $\lambda_1 = \min\{\lambda : \Sigma'_\lambda \subset \Omega\}$ e

$$\mu = \inf \left\{ \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_0 : \frac{\partial u}{\partial x_1} < 0 \quad \text{e} \quad u(x) < u(x_\lambda) \right\}.$$

Vogliamo mostrare che $\mu = \lambda_1$. Per assurdo supponiamo che $\mu > \lambda_1$: se $x \in \Sigma_\mu$ si ha $\frac{\partial u}{\partial x_1} \leq 0$ e $u(x) \leq u(x_\mu)$. Ma $u(x) \neq u(x_\mu)$ perché

Σ'_μ non tocca $\partial\Omega$, cioè esiste x tale che $u(x) > 0$ e $u(x_\mu) = 0$, perciò $u(x) - u(x_\mu) > 0$.

Applicando il Lemma 4.5, otteniamo $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ in $\Omega \cap T_\mu$ e $u(x) < u(x_\mu)$ in Σ'_μ . Inoltre, il Lemma 4.4 garantisce che $\frac{\partial u}{\partial x_1} < 0$ in $\Omega \cap \{x_1 > \mu - \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$.

Esiste (λ^k) tale che $\lambda_1 < \lambda^k \nearrow \mu$ e $x^k \in \Sigma_{\lambda^k}$ tale che $u(x^k) \geq u(x_{\lambda^k}^k)$. A meno di sottosuccessioni, $x^k \rightarrow x \in \overline{\Sigma_\mu}$, che implica $x_{\lambda^k}^k \rightarrow x_\mu$ e $u(x) \geq u(x_\mu)$. Però $u(x) < u(x_\mu)$ in Σ_μ , quindi $x \in \partial\Sigma_\mu$, cioè $x \in \Omega \cap T_\mu$. Esiste $y^k \in (x_{\lambda^k}^k, x^k)$ tale che

$$\frac{u(x^k) - u(x_{\lambda^k}^k)}{x_1^k - x_{\lambda^k}^k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(y^k) \geq 0.$$

Passando al limite, otteniamo $\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) \geq 0$, che contraddice la definizione di μ . Quindi $\mu = \lambda_1$, che implica $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ su T_{λ_1} e, di conseguenza, $u(x) = u(x_{\lambda_1})$, cioè u è simmetrica rispetto a x_1 . $\square$

Enunciamo ora due corollari del Teorema 4.1.

Corollario 4.6. Sia $u \in C^2(\overline{B_R(0)})$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B_R(0), \\ u > 0 & \text{in } B_R(0), \\ u = 0 & \text{su } \partial B_R(0), \end{cases}$$

dove $f \in C^1$. Allora u è radiale e decrescente, cioè $u(x) = v(r)$ con $r = |x|$ e $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ per ogni $0 < r < R$.

Corollario 4.7. Sia $A = B_R(0) \setminus B_{R'}(0)$, con $R > R'$, e $u \in C^2(\overline{A})$ una soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } A, \\ u > 0 & \text{in } A, \\ u = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases} \quad (4.5)$$

dove $f \in C^1$. Allora $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ per ogni $\frac{R+R'}{2} < |x| < R$.

Dal corollario precedente si vede come sull'anello non sia possibile dedurre la monotonia e la simmetria delle soluzioni senza ulteriori ipotesi. A tal proposito diamo un paio di definizioni:

Definizione 4.8 (Soluzioni non degeneri e semistabili). Sia u soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } A, \\ u = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Sia inoltre

$$L_u(v) := -\Delta v - f'(u)v$$

l'operatore linearizzato in u . La soluzione u si dice:

- *non degenera* se 0 non è un autovalore di L_u , cioè se il problema

$$\begin{cases} -\Delta v - f'(u)v = 0 & \text{in } A, \\ v = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ammette solo la soluzione banale $v \equiv 0$;

- *semistabile* se il primo autovalore dell'operatore linearizzato L_u è non negativo, cioè

$$\lambda_1(L_u, A) \geq 0.$$

Equivalentemente,

$$\int_A (|\nabla \varphi|^2 - f'(u)\varphi^2) dx \geq 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^1(A).$$

Senza usare il metodo di spostamento di iperpiani è possibile dimostrare la seguente:

Proposizione 4.9. Se u è non degenera oppure semistabile, allora u è radiale in A .

Dimostrazione. Consideriamo le coordinate polari e sia θ una qualsiasi coordinata angolare; derivando il sistema (4.5) rispetto a θ , si deduce

$$\begin{cases} -\Delta u_\theta = f'(u)u_\theta & \text{in } A, \\ u_\theta = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Se u è non degenera (0 non è autovalore del linearizzato), allora $u_\theta = 0$, i.e. u è radiale. Se u è semistabile, cioè $\lambda_1(L_u, A) \geq 0$, allora u_θ è la prima autofunzione: $u_\theta = c\varphi_1$, con $\varphi_1 > 0$. Per il PM si ha $u_\theta \geq 0$. Se $c > 0$ allora $u_\theta > 0$, che è assurdo perché u è periodica; quindi $u_\theta \equiv 0$. $\square$

Il Teorema di Gidas-Ni-Nirenberg è quasi ottimale. A tal proposito, procediamo ora con alcune osservazioni riguardanti le ipotesi del Teorema 4.1.

Osservazione 4.10. È necessario che $f \in C^1$? No, il Teorema continua a valere se $f = f_1 + f_2$ dove $f_1 \in C^1$ e f_2 crescente. Le dimostrazioni dei Lemmi 4.4 e 4.5 possono essere opportunamente modificate.

Osservazione 4.11. La condizione $u > 0$ in Ω è fondamentale? Ha senso considerare invece $u \geq 0$? Se $f(u) \geq 0$, per il PM si ha che $u > 0$. Se, di contro, $f(u) < 0$, possiamo fare un controesempio: la funzione $u(x) = 1 - \cos(2\pi x)$ soddisfa l'equazione $-u'' = 4\pi(u - 1)$ in $(-1, 1)$, ma $u(x)$ non è decrescente.

Osservazione 4.12. La lipschitzianità di f è necessaria? Consideriamo $p > 2$ e definiamo

$$w(x) := \begin{cases} (1 - |x|^2)^p & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Abbiamo che $w \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e soddisfa

$$\Delta w = (-4p(p-1) - 2np)w^{\frac{p-1}{p}} + 4p(p-1)w^{\frac{p-2}{p}} = f(w),$$

dove $f(w)$ cambia segno ed è hölderiana di esponente $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$. Sia x_0 tale che $|x_0| = 3$ e

$$u(x) := \begin{cases} w(x) & \text{se } |x| < 1, \\ w(x - x_0) & \text{se } |x - x_0| < 1, \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Allora u soddisfa

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } B_5(0), \\ u = 0 & \text{su } \partial B_5(0), \end{cases}$$

e verifica $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ ma u non è radiale.

Osservazione 4.13. È possibile utilizzare $f(u, x)$? Sì, se $f(u, x)$ è decrescente in x_1 , oppure se $f(u, |x|)$ è decrescente in $|x|$. Se $f(u, |x|)$ fosse invece crescente in $|x|$, come controesempio possiamo considerare una autofunzione non radiale del laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{in } B_R(0), \\ w = 0 & \text{su } \partial B_R(0). \end{cases}$$

Si ha che w cambia segno in $B_R(0)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $u_\varepsilon(x) = (R^2 - |x|^2) + \varepsilon w(x)$: abbiamo che

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = -2R + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}.$$

perciò, se ε è abbastanza piccolo, $u_\varepsilon > 0$ in $B_R(0)$. Abbiamo quindi che u è non radiale ma soddisfa

$$-\Delta u_\varepsilon = 2n + \varepsilon \Delta w = 2n - \varepsilon \lambda w = 2n + \lambda u_\varepsilon + \lambda(|x|^2 - R^2) = f(u_\varepsilon, |x|).$$

Osservazione 4.14. Il Teorema non vale se al posto della condizione di Dirichlet omogenea se ne considera una diversa, ad esempio una condizione di Neumann omogenea, quindi $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su $\partial B_R(0)$: infatti in un lavoro di Adimurti e Mancini [1] si dimostra che le soluzioni con $f(u) = u^{\frac{n+2}{n-2}}$ hanno un unico punto di massimo sul bordo, quindi sono chiaramente non radiali.

Osservazione 4.15. Se il dominio è simmetrico ma non convesso il Teorema non è più vero perché si perde la simmetria della soluzione: come esempio, basta pensare ad un dominio "a forma di osso" ("dumb-bell") ovvero due palle unite da uno stretto "manico". Nel caso di non linearità con esponente critico, è possibile dimostrare l'esistenza di soluzioni non simmetriche, si veda per esempio [16]. E se viceversa il dominio fosse convesso ma non simmetrico? Anche se non simmetriche, le soluzioni sarebbero comunque uniformemente monotone rispetto ad un cono di direzioni entranti in un intorno tubolare del bordo grazie al MMP.

Osservazione 4.16. Possiamo sostituire la condizione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ con quella più naturale delle soluzioni classiche per questo tipo di problemi ovvero $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$? Sì: la dimostrazione di questo caso sarà trattata nel capitolo successivo con l'utilizzo della stima ABP.

LA STIMA DI ALEXANDROV-BAKELMAN-PUCCI (ABP)

In questo capitolo introduciamo alcuni concetti più generali di soluzione. Consideriamo un operatore L in forma di divergenza e un'equazione della forma

$$Lu = \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) D_j u + b_i(x) u \right) + c(x) u = 0. \quad (5.1)$$

Definizione 5.1. Una funzione $u \in W_{\text{loc}}^{1,2}(\Omega)$ è detta *soluzione debole o generalizzata* di (5.1) se

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_i u + b_i u \right) D_i v + c(x) uv \, dx = 0,$$

per ogni funzione $v \in C_0^1(\Omega)$.

Osservazione 5.2. Un operatore nella forma generale (1.1) può essere scritto nella forma di divergenza (5.1) se i coefficienti sono differenziabili. Osserviamo, inoltre, che una soluzione classica è anche una soluzione debole. Viceversa, data una soluzione debole di classe $C^2(\Omega)$ e coefficienti dell'operatore sufficientemente lisci, allora essa è anche classica.

Nonostante il concetto di soluzione debole permetta di considerare un insieme molto più ampio di funzioni, esso necessita di avere sottomano un operatore nella forma di divergenza (5.1). Introduciamo allora un concetto di soluzione più generale delle soluzioni classiche, ma applicabile anche ad operatori nella forma generale (1.1), dette *soluzioni forti*.

Definizione 5.3. Sia $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega)$, u è detta *soluzione forte* di (1.1) se soddisfa

$$Lu = 0,$$

quasi ovunque su Ω .

Le stime che proviamo in questo capitolo sono valide per soluzioni forti nello spazio di Sobolev $W^{2,n}(\Omega)$. Tuttavia, per non voler complicare troppo la trattazione, proveremo le stime per funzioni di classe $C^2(\Omega)$. L'estensione allo spazio $W^{2,n}(\Omega)$ avviene considerando una successione di funzioni $\{u_m\} \in C^2(\Omega)$ che converge a u in $W^{2,n}(\Omega)$, sfruttando il fatto che $C^2(\Omega)$ è denso in $W^{2,n}(\Omega)$.

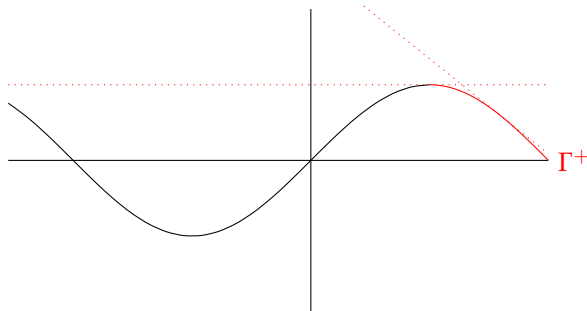
Avremo inoltre bisogno di definire due concetti importanti come quello di *insieme di contatto* e *sottodifferenziale*.

Definizione 5.4 (Insieme di contatto superiore). Siano Ω un aperto connesso ed u una funzione continua su Ω . L'*insieme di contatto superiore* è dato da

$$\Gamma^+ = \{y \in \Omega : u(x) \leq u(y) + P \cdot (x - y) \ \forall x \in \Omega, \exists P = P(y) \in \mathbb{R}^n\}$$

Notiamo che:

- Γ^+ misura l'insieme di concavità: se u è concava, allora $\Gamma^+ = \Omega$;
- Γ^+ è relativamente chiuso rispetto a Ω : se $\{y^k\} \in \Gamma^+$ e $y^k \rightarrow \bar{y}$, allora $\bar{y} \in \Gamma^+$;
- Se $u \in C^1(\Omega)$, allora necessariamente $P = \nabla u(y)$.
- Se $u \in C^2(\Omega)$, allora necessariamente $D^2u(y) \leq 0$ per ogni $y \in \Gamma^+$, i.e. $(D^2_{ij}u(y))$ è semidefinita negativa per ogni $y \in \Gamma^+$.

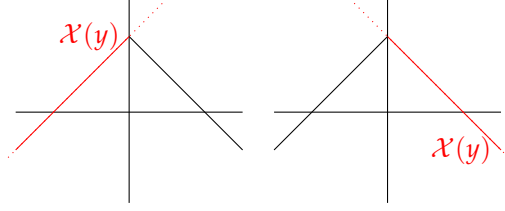


In **rosso** l'immagine dell'insieme di contatto superiore. Per una funzione in $\mathbb{R}$ è rappresentato dai punti in cui il grafico della funzione sta tutto sotto la tangente.

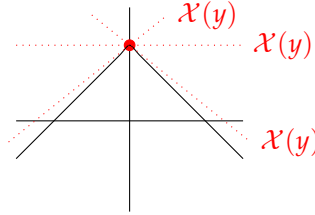
Definizione 5.5 (Sottodifferenziale). Sia $u \in C(\bar{\Omega})$. Definiamo il *sottodifferenziale* di u in $y \in \bar{\Omega}$ come

$$\mathcal{X}(y) = \{P \in \mathbb{R}^n : u(x) \leq u(y) + P \cdot (x - y) \text{ per ogni } x \in \Omega\}.$$

Osserviamo che se $u \in C^1$, esiste un'unica direzione $P = \nabla u(y)$ e $\mathcal{X} : u \rightarrow \nabla u$. Prendiamo come esempio $u(x) = 1 - |x|$ con $x \in \mathbb{R}$: chiaramente $u \notin C^1$ e inoltre:



$$\mathcal{X}(y) = 1 \text{ se } y < 0, \quad \mathcal{X}(y) = -1 \text{ se } y > 0,$$



$$\mathcal{X}(y) = [-1, 1] \text{ se } y = 0.$$

Quest'ultimo esempio può essere generalizzato in $\mathbb{R}^n$ considerando

$$u(x) = a \left(1 - \frac{|x - z|}{R} \right) \quad \text{con } x \in B_R(z).$$

In questo caso si verifica che:

$$\mathcal{X}(y) = \begin{cases} -\frac{a}{R} \frac{y - z}{|y - z|} & \text{se } y \neq z, \\ B_{\frac{a}{R}}(0) & \text{se } y = z. \end{cases}$$

Consideriamo ora L come nella (1.1).

Teorema 5.6 (Stima ABP). Sia Ω limitato e $c(x) \leq 0$. Sia inoltre $u \in W_{\text{loc}}^{2,n}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ che verifica

$$\begin{cases} Lu \geq f & \text{in } \Omega, \\ u \leq 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^n(\Omega)$. Allora esiste $C = C(\lambda, \Lambda, b, c) > 0$ tale che

$$\sup_{\Omega} u \leq C \text{diam}(\Omega) \|f\|_{L^n(\Gamma_{u^+}^+)}, \quad (5.2)$$

dove $\Gamma_{u^+}^+$ è l'insieme di contatto superiore di u^+ .

Dimostrazione. Come sottolineato a inizio capitolo, la dimostrazione avverrà per una funzione $u \in C^2(\Omega)$.

Per semplicità poniamo $b_i = 0$. Sia

$$M = \sup_{\Omega} u = u(x_0),$$

con $x_0 \in \Omega$ perché $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Sia $d = \text{diam}(\Omega)$ e definiamo $v := -u^+$. Allora

$$-M = \inf_{\Omega} v = v(x_0), \quad \text{e} \quad v = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

con $x_0 \in \Omega$. Chiamiamo Γ_v^- l'insieme di contatto inferiore e $A(x) = (a_{ij}(x))$. Allora, su Γ_v^- , se mostrassimo che $u \geq 0$ in Γ_v^- avremmo

$$\begin{aligned} \text{tr}(A(x)D^2v) &= - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}u = -Lu + c(x)u \\ &\leq -Lu \leq -f(x), \end{aligned} \tag{5.3}$$

poiché per ipotesi $c(x) \leq 0$ in Ω .

Dimostriamo che $u \geq 0$ in $\Gamma_v^- = \Gamma_{u^+}^+$. Osserviamo, innanzitutto, che se $u \leq 0$ in Ω allora la stima (5.2) è banale. Dunque supponiamo esista un punto $\tilde{x} \in \Omega$ tale che $u(\tilde{x}) > 0$. Sia ora $y \in \Gamma_{u^+}^+ \setminus \{0\}$: allora $\exists P(y)$ tale che $u^+(x) \leq u^+(y) + P \cdot (y - x)$, $\forall x \in \Omega$. Adesso supponiamo, per assurdo, che $u(y) < 0$, allora dovremmo avere che $u^+(x) \leq P \cdot (y - x)$, $\forall x \in \Omega$. Siccome $u^+(x) \geq 0$ è necessario che $P \cdot (y - x) \geq 0$ per ogni $x \in \Omega$. Ma allora basta considerare dapprima il punto $x = -y$ cosicché $P \cdot (2y) \geq 0$ e successivamente $x = 3y$ cosicché $P \cdot (-2y) \geq 0$, ovvero è necessario che $P \equiv 0$. Tuttavia, se $P \equiv 0$ abbiamo un assurdo scegliendo $x = \tilde{x}$ cosicché

$$u^+(\tilde{x}) = u(\tilde{x}) > 0 = 0 \cdot (y - \tilde{x}).$$

Allora si ha che

$$B_{\frac{M}{d}}(0) \subset \nabla v(\Gamma_v^-),$$

dove ∇v rappresenta il gradiente o il sottodifferenziale: infatti consideriamo $P \in \mathbb{R}^n$, tale che $|P| < \frac{M}{d}$, e

$$\min_{y \in \Omega} \{v(y) - P \cdot y\} = v(x_p) - P \cdot x_p,$$

per un certo $x_p \in \Omega$. Se, per assurdo, $x_p \in \partial\Omega$, allora si verificherebbe

$$-P \cdot x_p = v(x_p) - P \cdot x_p \leq v(x_0) - P \cdot x_0 = -M - P \cdot x_0,$$

che è equivalente a

$$M \leq P \cdot (x_p - x_0) \leq |P| |x_p - x_0| < \frac{M}{d} d = M.$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} \left| B_{\frac{M}{d}} \right| &= C(n) \left(\frac{M}{d} \right)^n \leq |\nabla v(\Gamma_v^-)| = \int_{\nabla v(\Gamma_v^-)} dx \\ &\leq \int_{\Gamma_v^-} |\det(D^2 v)| dx = \int_{\Gamma_v^-} \det(D^2 v) dx. \end{aligned}$$

In conclusione, se $x \in \Gamma_v^-$, applicando la stima (5.3) abbiamo

$$\begin{aligned} \det(D^2 v(x)) &= \frac{1}{\det(A(x))} \det(A(x) D^2 v(x)) \leq \frac{1}{\lambda^n} \det(A(x) D^2 v(x)) \\ &\leq \lambda^{-n} \left(\frac{\text{tr}(A(x) D^2 v(x))}{n} \right)^n \leq (n\lambda)^{-n} (-Lu)^n \\ &= (n\lambda)^{-n} (-f(x))^n \leq (n\lambda)^{-n} |f(x)|^n, \end{aligned}$$

da cui segue direttamente la tesi

$$M = \sup_{\Omega} u \leq Cd \|f\|_{L^n(\Gamma_v^-)} = Cd \|f\|_{L^n(\Gamma_{u^+}^+)}.$$

□

Osservazione 5.7 (ABP migliorata). La (5.2) è stata migliorata da Cabré [6] sostituendo il diametro del dominio con la sua misura:

$$\sup_{\Omega} u \leq C |\Omega|^{\frac{1}{n}} \|f\|_{L^n(\Gamma_{u^+}^+)}. \quad (5.4)$$

Con l'utilizzo della (5.4), dimostreremo la seguente

Proposizione 5.8 (Principio del Massimo nei domini piccoli). Sia Ω limitato, $c^+ \in L^n(\Omega)$. Allora esiste $\delta = \delta(n, \lambda, \text{diam}(\Omega), L)$ tale per cui L verifica il PM in Ω se $|\Omega| < \delta$.

Dimostrazione. Supponiamo che $Lu \geq 0$ in Ω e $u \leq 0$ su $\partial\Omega$. Sia $d = \text{diam}(\Omega)$ e $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$. Sia $L_0 = (L - c)$: allora

$$(L_0 - c^-(x))u \geq -c^+(x)u \geq -c^+(x)u^+.$$

Possiamo quindi applicare la (5.4) a $L_0 - c^-(x)$, infatti si ha che $-c^-(x) \leq 0$ e $-c^+u^+ \in L^n(\Omega)$, ottenendo

$$\sup_{\Omega} u \leq C \|c^+(x)u^+\|_{L^n(\Omega)} \leq C|\Omega|^{\frac{1}{n}} \|c^+\|_{L^n(\Omega)} \sup_{\Omega} u^+.$$

Se $C|\Omega|^{\frac{1}{n}} \|c^+\|_{L^n(\Omega)} < 1$, e dunque $\delta = (C\|c^+\|_{L^n(\Omega)})^{-n}$, si ha che

$$\sup_{\Omega} u < \sup_{\Omega} u^+,$$

che implica $u \leq 0$ in Ω . □

Dimostrazione del Teorema 4.1 utilizzando la Proposizione 5.8

Innanzitutto, la notazione è la stessa della dimostrazione del Teorema 3.1. Per la Proposizione 4.2, sappiamo che se $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$, allora $\Sigma'_\lambda \subset \Omega$. Definiamo $v_\lambda(x) = u(x_\lambda) = u(2\lambda - x_1, x')$: si ha, come già calcolato in precedenza,

$$-\Delta v_\lambda(x) = -\Delta u(x_\lambda) = f(u(x_\lambda)) = f(v_\lambda(x)) \quad \text{in } \Omega.$$

Possiamo affermare, di conseguenza,

$$-\Delta(v_\lambda - u) = f(v_\lambda) - f(u) = \frac{f(v_\lambda) - f(u)}{v_\lambda - u} (v_\lambda - u),$$

e, denominando $w_\lambda = v_\lambda - u$ e $c_\lambda = \frac{f(v_\lambda) - f(u)}{v_\lambda - u}$,

$$\begin{cases} -\Delta w_\lambda = c_\lambda w_\lambda & \text{in } \Sigma_\lambda, \\ w_\lambda \geq 0 & \text{su } \partial\Sigma_\lambda. \end{cases}$$

Usiamo la Proposizione 2.8 con $m = 1$, $b = 0$, $c = c_\lambda$, grazie ai quali è soddisfatta la relazione

$$c_\lambda e^{\frac{2 \cdot 0 \cdot \eta}{1}} \leq c_\lambda + \frac{2 \cdot 0}{1}.$$

Inoltre $\Sigma_\lambda \subset \{\lambda_0 - \eta < x_1 < \lambda_0\}$, per un certo η , e dunque si ha $w_\lambda \geq 0$ in Σ_λ , e perciò $v_\lambda \geq u$ in Σ_λ . Sia ora

$$\hat{\lambda} = \inf\{\lambda : w_\lambda \geq 0 \text{ in } \Sigma_\lambda\}.$$

Vogliamo mostrare che $\hat{\lambda} = 0$. Per assurdo, sia $\hat{\lambda} > 0$: allora $w_{\hat{\lambda}} > 0$ in $\Sigma_{\hat{\lambda}}$. Esiste $K \subset \subset \Sigma_{\hat{\lambda}}$ compatto tale che $w_{\hat{\lambda}} \geq 2\alpha > 0$. Consideriamo

allora $\Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon}$: ovviamente, essendo $\Sigma_{\hat{\lambda}} \subset \Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon}$ si ha $K \subset \subset \Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon}$. Per il Teorema della permanenza del segno, dato ε piccolo, si ha che in K , siccome

$$u(2\hat{\lambda} - x_1, x') - u(x_1, x') \geq 2\alpha,$$

allora

$$u(2\hat{\lambda} - 2\varepsilon - x_1, x') - u(x_1, x') \geq \alpha,$$

ovvero $w_{\hat{\lambda}-\varepsilon} \geq \alpha > 0$. Si osservi inoltre che dall'ipotesi $\hat{\lambda} > 0$ si ha che anche $\hat{\lambda} - \varepsilon > 0$, per un ε piccolo.

Adesso scegliamo K in modo che $|\Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon} \setminus K| < \delta$ e applichiamo la Proposizione 5.8 per ottenere che, grazie al *PM*, $w_{\hat{\lambda}-\varepsilon} > 0$ in $\Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon} \setminus K$. Unendo le due condizioni si ha che $w_{\hat{\lambda}-\varepsilon} > 0$ in $\Sigma_{\hat{\lambda}-\varepsilon}$, che contraddice la minimalità di $\hat{\lambda}$. Da questo deduciamo che $\hat{\lambda} = 0$ da cui segue la tesi. $\square$

LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA

La disuguaglianza isoperimetrica nel piano asserisce che una curva piana che racchiude un'area fissata ed ha la lunghezza minima possibile è una circonferenza; o, in alternativa, che una curva piana che ha lunghezza assegnata e racchiude la più grande area possibile è un cerchio.

I matematici sono stati affascinati da tale teorema da tempo immemore: si dice che esso fosse noto già ad Archimede e Zenodoro, e più tardi a Keplero, Galilei e Jacob Bernoulli; è stato poi preso in esame da Eulero, e vi hanno in seguito lavorato alacremente nel diciannovesimo secolo matematici del calibro di Sturm, Schwarz, Steiner e Weierstrass.

Dimostrazioni complete sono apparse nei primi anni del Novecento, ad opera di Hurwitz, Minkowski, Lebesgue, Carathéodory e Study e Blaschke. Ne esamineremo alcune e ne presenteremo una più recente, dovuta a Cabré [7], che fa uso del metodo ABP.

Il materiale presente in questo capitolo è preso dalla tesi di laurea di Vittoria Vevey Modugno [13].

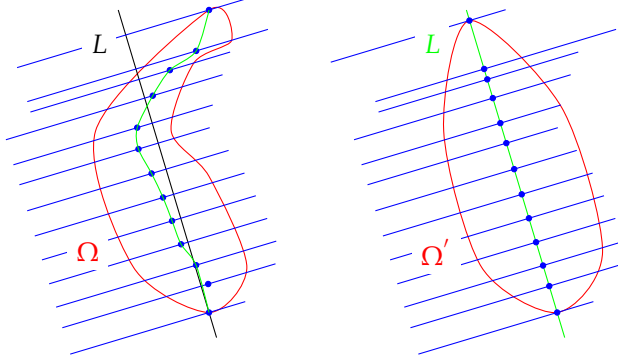
Teorema 6.1 (Steiner). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ compatto e convesso. Allora

$$P^2(\Omega) \geq 4\pi A(\Omega),$$

dove $P(\Omega)$ e $A(\Omega)$ indicano rispettivamente il perimetro e l'area di Ω .

Dimostrazione. Sia L una retta di $\mathbb{R}^2$. Definiamo il simmetrizzato di Steiner di Ω , l'insieme $\text{st}_L(\Omega) = \Omega' \subset \mathbb{R}^2$ tale che

- per ogni retta $M \perp L$ tale che $M \cap \Omega = \emptyset$, allora $M \cap \Omega' = \emptyset$;
- se $M \cap \Omega$ è un segmento di lunghezza l , allora $M \cap \Omega'$ è un segmento di lunghezza l centrato in $M \cap L$.



Valgono le seguenti proprietà:

- (1) $\text{st}_L(\Omega)$ è compatto e simmetrico rispetto a L ;
- (2) $A(\Omega) = A(\text{st}_L(\Omega))$, valida grazie al Teorema di Fubini–Tonelli;
- (3) $P(\Omega) \geq P(\text{st}_L(\Omega))$, che si dimostra utilizzando la formula di Steiner–Minkowski (si veda [4, Proposizione 12.3.6 e Teorema 12.10.6]).

Definiamo ora

$$\mathcal{F} = \left\{ K \subset \mathbb{R}^2 \text{ compatti e convessi} : A(K) = A(\Omega) \text{ e } P(K) \leq P(\Omega) \right\}.$$

Si ha che $\mathcal{F} \neq \emptyset$, perché $\Omega \in \mathcal{F}$, e $\mathcal{F}$ chiuso in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, dove

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^2) = \left\{ K \subset \mathbb{R}^2 \text{ sp. metrici compatti, convessi e non vuoti} \right\}.$$

Inoltre, grazie alle proprietà (1), (2) e (3) si verifica l’inclusione

$$\text{st}_L(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}.$$

Possiamo quindi applicare il Teorema della Palla di Blaschke (si veda [5]), che ci garantisce l’esistenza di $r > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tali per cui $B_r(x_0) \in \mathcal{F}$. Per come abbiamo definito $\mathcal{F}$, si ha

$$P^2(\Omega) \geq P^2(B_r(x_0)) = (2\pi r)^2 = 4\pi \pi r^2 = 4\pi A(B_r(x_0)) = 4\pi A(\Omega).$$

□

Teorema 6.2 (Hurwitz–Lebesgue). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva di Jordan (semplice e chiusa) e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio limitato tale che $\gamma([a, b]) = \partial\Omega$. Allora

$$P^2(\Omega) \geq 4\pi A(\Omega).$$

Inoltre $P^2(\Omega) = 4\pi A(\Omega)$ se e solo se $\gamma([a, b])$ è una circonferenza di raggio $r = \frac{P(\Omega)}{2\pi}$.

Per questa dimostrazione serve la seguente:

Proposizione 6.3 (Disuguaglianza di Wirtinger). Sia $u \in H^1((a, b))$ tale che $u(a) = u(b) = 0$ e $\int_a^b u(t) dt = 0$. Allora

$$\int_a^b u^2(t) dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b (u'(t))^2 dt.$$

Dimostrazione. Innanzitutto, fissiamo $a = 0$ e $b = 2\pi$: notiamo che $u, u' \in L^2(\mathbb{T})$, dove $L^2(\mathbb{T})$ è lo spazio $L^2(0, 2\pi)$ munito della misura di Lebesgue 1-dimensionale divisa per 2π . Poniamo ora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$a_n := \hat{u}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) e^{-int} dt, \quad b_n := \hat{u}'(n) = \int_0^{2\pi} u'(t) e^{-int} dt.$$

Si ha, per l'identità di Parseval,

$$\int u^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2, \quad \int (u')^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2,$$

perciò la disuguaglianza da dimostrare si ridurrebbe a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|^2. \quad (6.1)$$

Utilizziamo ora l'integrazione per parti e l'ipotesi che $u(0) = u(2\pi) = 0$ per calcolare

$$\begin{aligned} 2\pi b_n &= \int_0^{2\pi} u'(t) e^{-int} dt = \left[u(t) e^{-int} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u(t) (e^{-int})' dt \\ &= u(2\pi) - u(0) + in \int_0^{2\pi} u(t) e^{-int} dt = 2\pi i n a_n, \end{aligned}$$

che implica $b_n = i n a_n$ e, in particolare, $b_0 = 0$. Inoltre

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u dt = 0.$$

Di conseguenza, la (6.1) è banalmente soddisfatta, essendo

$$\sum_{n \neq 0} |a_n|^2 \leq \sum_{n \neq 0} n^2 |a_n|^2.$$

Ponendo ora a e b arbitrari, definiamo

$$v(t) := u\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right), \quad \text{con } t \in (0, 2\pi).$$

Abbiamo che

$$\int_0^{2\pi} v^2(t) dt = \int_0^{2\pi} u^2\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right) dt = \frac{2\pi}{b-a} \int_a^b u^2(\tau) d\tau < \infty,$$

cioè $v \in L^2(0, 2\pi)$; inoltre, per ogni $\phi \in C_c^\infty(0, 2\pi)$, si verifica

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{b-a}{2\pi} u'\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right) \phi(t) dt &= \int_a^b u'(\tau) \phi\left(2\pi \frac{\tau-a}{b-a}\right) d\tau = \\ &= - \int_a^b u(\tau) \frac{d}{d\tau} \phi\left(2\pi \frac{\tau-a}{b-a}\right) d\tau = - \frac{2\pi}{b-a} \int_a^b u(\tau) \phi'\left(2\pi \frac{\tau-a}{b-a}\right) d\tau = \\ &= - \int_0^{2\pi} u\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right) \phi'(t) dt = - \int_0^{2\pi} v(t) \phi'(t) dt, \end{aligned}$$

che implica che la derivata debole di v è data da

$$v'(t) = \frac{b-a}{2\pi} u'\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right).$$

Inoltre $v' \in L^2(0, 2\pi)$ perché

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (v'(t))^2 dt &= \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \left(u'\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right)\right)^2 dt \\ &= \frac{b-a}{2\pi} \int_a^b (u'(\tau))^2 d\tau < \infty, \end{aligned}$$

e, di conseguenza, $v \in H^1(0, 2\pi)$. Infine $v(0) = u(a) = u(b) = v(2\pi) = 0$ e

$$\int_0^{2\pi} v(t) dt = \int_0^{2\pi} u\left(a + \frac{b-a}{2\pi}t\right) dt = \frac{2\pi}{b-a} \int_a^b u(\tau) d\tau = 0.$$

Per quanto provato in precedenza, si ha che

$$\int_0^{2\pi} v^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} (v'(t))^2 dt,$$

e perciò

$$\frac{2\pi}{b-a} \int_a^b u^2(t) dt \leq \frac{b-a}{2\pi} \int_a^b (u'(t))^2 dt.$$

□

Possiamo ora dimostrare il Teorema Di Hurwitz-Lebesgue.

Dimostrazione del Teorema 6.2

Supponiamo che $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $\gamma : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $|\gamma'| = 1$ q.o.; poniamo $X = x - x_0$ e $Y = y - y_0$, dove (x_0, y_0) baricentro: allora $X'^2 + Y'^2 = 1$ q.o. Dalla Proposizione 6.3 abbiamo

$$\int_0^l X^2(t) dt \leq \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \int_0^l X'(t) dt \quad (6.2)$$

e

$$\int_0^l Y^2(t) dt \leq \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \int_0^l Y'(t) dt. \quad (6.3)$$

Per concludere, ci basta applicare la formula di Gauss–Green e la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz, unite a (6.2) e (6.3):

$$\begin{aligned} 2A(\Omega) &= \int_{\gamma} (Xdy - Ydx) = \int_0^l (X(t)Y'(t) - Y(t)X'(t)) dt \\ &= \int_0^l (X(t), Y(t)) \cdot (-Y'(t), X'(t)) dt \\ &\leq \left(\int_0^l (X^2(t) + Y^2(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l (X'^2(t) + Y'^2(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{l}{2\pi} \int_0^l dt = \frac{l^2}{2\pi} = \frac{P^2(\Omega)}{2\pi}. \end{aligned}$$

Notiamo che, nella relazione precedente, vale l'uguaglianza se

$$(X(t), Y(t)) \parallel (-Y'(t), X'(t)) \quad \text{per ogni } t \in [0, l],$$

o, equivalentemente, se

$$(X(t), Y(t)) \perp (X'(t), Y'(t)) \quad \text{per ogni } t \in [0, l].$$

Vale quindi che $P^2(\Omega) = 4\pi A(\Omega)$ se $\partial\Omega = \partial B_r(x_0, y_0)$ dove

$$r = \frac{l}{2\pi} = \frac{P(\Omega)}{2\pi}.$$

□

Teorema 6.4 (Gromov). Sia Ω un dominio piano limitato e di classe C^1 . Allora $P^2(\Omega) \geq 4\pi A(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $U = B_1(0)$ e $V: \overline{\Omega} \rightarrow \overline{U}$ tale che

$$\vec{V}(x, y) = (a(x), b(x, y)),$$

dove

- $a(x) = [-1, 1]$ è l'unico numero che soddisfa

$$\frac{A((\xi, \eta) \in \Omega : \xi \leq x)}{A(\Omega)} = \frac{A((\xi, \eta) \in U : \xi \leq a(x))}{A(U)},$$

applicando Fubini si ha

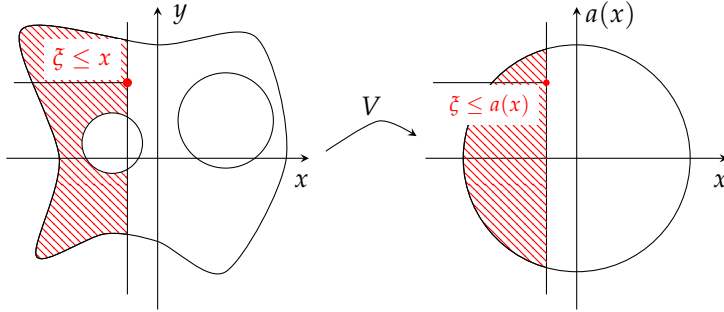
$$\frac{\int_{-\infty}^x L(\eta \in \mathbb{R} : (\xi, \eta) \in \Omega) d\xi}{A(\Omega)} = \frac{\int_{-\infty}^{a(x)} L(\eta \in \mathbb{R} : (\xi, \eta) \in U) d\xi}{\pi},$$

dove L denota la lunghezza del segmento tra parentesi. Derivando membro a membro si ottiene

$$\frac{L(\eta \in \mathbb{R} : (x, \eta) \in \Omega)}{A(\Omega)} = \frac{a'(x) L(\eta \in \mathbb{R} : (a(x), \eta) \in U)}{\pi},$$

da cui ricaviamo

$$a'(x) = \frac{\pi}{A(\Omega)} \frac{L(\eta \in \mathbb{R} : (x, \eta) \in \Omega)}{L(\eta \in \mathbb{R} : (a(x), \eta) \in U)}. \quad (6.4)$$



- $b(x, y) \in [-1 - \sqrt{1 - a^2(x)}, 1 - \sqrt{1 - a^2(x)}]$ è l'unico numero che verifica

$$\frac{L(\eta \leq y : (\xi, \eta) \in \Omega)}{L(\eta \in \mathbb{R} : (x, \eta) \in \Omega)} = \frac{L(\eta \leq b(x, y) : (a(x), \eta) \in U)}{L(\eta \in \mathbb{R} : (a(x), \eta) \in U)},$$

perciò

$$b(x, y) = -\sqrt{1 - a^2(x)} + \frac{L(\eta \in \mathbb{R} : (a(x), \eta) \in U)}{L(\eta \in \mathbb{R} : (x, \eta) \in \Omega)}(y + f(x));$$

abbiamo quindi che

$$\frac{\partial b}{\partial y} = \frac{L(\eta \in \mathbb{R} : (a(x), \eta) \in U)}{L(\eta \in \mathbb{R} : (x, \eta) \in \Omega)}. \quad (6.5)$$

Conseguentemente, grazie a (6.4) e (6.5), possiamo calcolare

$$\nabla \cdot \vec{V} = a'(x) + \frac{\partial b}{\partial y} = 2 \frac{a'(x) + \frac{\partial b}{\partial y}}{2} \geq 2 \sqrt{a'(x) \frac{\partial b}{\partial y}} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{A(\Omega)}}. \quad (6.6)$$

Come ultimo passo, utilizzando la (6.6) e il Teorema della divergenza, non ci resta che calcolare

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \int_{\Gamma} ds \geq \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \nu ds = \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} dxdy \geq \int_{\Omega} 2 \sqrt{\frac{\pi}{A(\Omega)}} dxdy \\ &= 2 \sqrt{\frac{\pi}{A(\Omega)}} \int_{\Omega} dxdy = 2 \sqrt{\pi A(\Omega)}. \end{aligned} \quad \square$$

Teorema 6.5 (Cabré). Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ la soluzione di

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{P(\Omega)}{A(\Omega)} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sia inoltre Γ_u^- l'insieme di contatto inferiore. Allora $B_1(0) \subseteq \nabla u(\Gamma_u^-)$.

Dimostrazione. Scegliamo $P \in B$ e $w := \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $w(Q) = u(Q) - Q \cdot P$. Se $w(Q_0) = \min_{\overline{\Omega}} w$ allora $Q_0 \notin \partial\Omega$: infatti, se per assurdo $Q_0 \in \partial\Omega$, la funzione $t \mapsto w(Q_0 - t\nu(Q_0))$ sarebbe $C^2([0, \varepsilon])$ e avrebbe un minimo in $t = 0$, perciò

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} w(Q_0 - t\nu(Q_0)) = \nabla w(Q_0) \cdot (-\nu(Q_0)) \\ &= -\nabla u(Q_0) \cdot \nu(Q_0) + P \cdot \nu(Q_0) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial \nu}(Q_0) + P \cdot \nu(Q_0) \leq -1 + \|P\| < 0, \end{aligned}$$

che è assurdo. Quindi $Q_0 \in \Omega$ e $0 = \nabla w(Q_0) = \nabla u(Q_0) - P$. Inoltre $Q_0 \in \Gamma_u^-$ perché, per ogni $Q \in \overline{\Omega}$, si ha $w(Q) \geq w(Q_0)$, cioè $u(Q) - Q \cdot P \geq u(Q_0) - Q_0 \cdot P$, che implica $u(Q) \geq u(Q_0) + \nabla u(Q_0)(Q - Q_0)$. $\square$

Osservazione 6.6. La disuguaglianza isoperimetrica è una conseguenza del Teorema di Cabré, infatti:

$$\begin{aligned}
 \pi = A(B) &\leq A(\nabla u(\Gamma_u^-)) \leq \int_{\Gamma_u^-} |\det J(\nabla u)| \, dx = \int_{\Gamma_u^-} |\det D^2 u| \, dx \\
 &= \int_{\Gamma_u^-} \det D^2 u \, dx \leq \int_{\Gamma_u^-} \left(\frac{\text{tr}(D^2 u)}{2} \right)^2 \, dx = \int_{\Gamma_u^-} \left(\frac{\Delta u}{2} \right)^2 \, dx \\
 &= \left(\frac{P(\Omega)}{2A(\Omega)} \right)^2 A(\Gamma_u^-) \leq \frac{P^2(\Omega)}{4A(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

APPENDICE

Teorema 7.1 (Krein–Rutman [11]). Il primo autovalore $\lambda_1(L, \Omega)$ è isolato, semplice (cioè l'autospazio relativo ha dimensione 1) e l'autofunzione φ_1 , relativa a λ_1 , ha segno costante.

Teorema 7.2 (Stampacchia). Se $u \in H^1(\Omega)$, allora $u^\pm \in H^1(\Omega)$. Inoltre

$$\int_{\Omega} |\nabla u^\pm|^2 = \int_{\Omega^\pm} |\nabla u|^2,$$

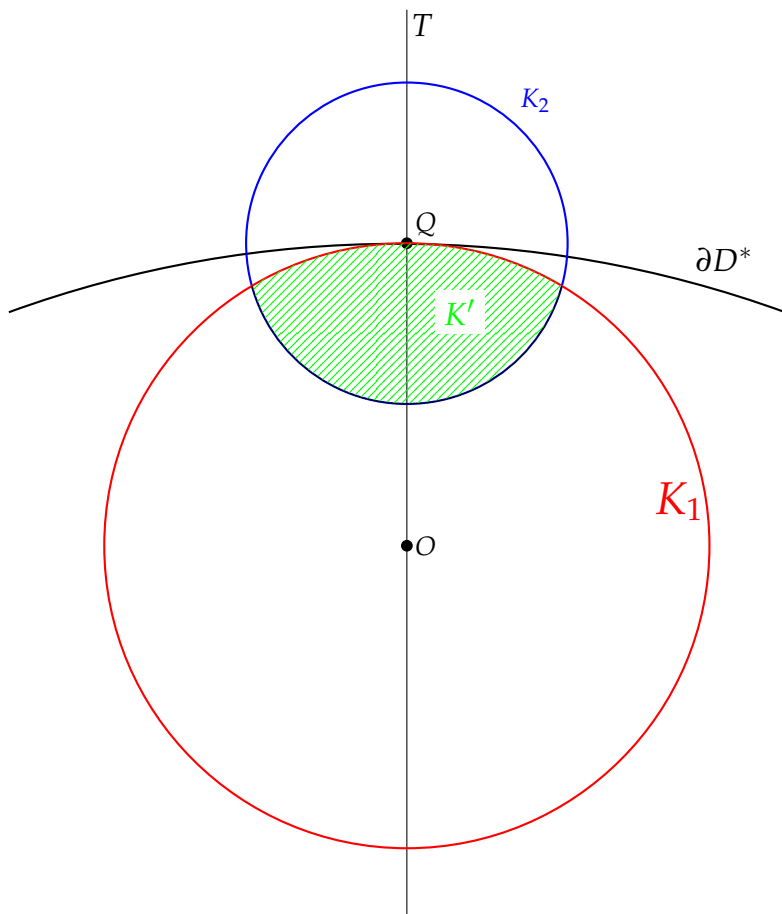
dove $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \Omega : u(x) < 0\}$.

Lemma 7.3 (Lemma dell'angolo di Serrin). Sia D^* un dominio di $\mathbb{R}^n$ con frontiera C^2 e sia T un iperpiano contenente la normale a ∂D^* nel punto Q . Sia inoltre D la porzione di D^* che sta da una parte rispetto a T . Supponiamo che $w \in C^2(\overline{D})$, $\Delta w \leq 0$ in D , $w \geq 0$ in D e $w(Q) = 0$. Denotiamo con s qualsiasi direzione applicata in Q entrante non tangenzialmente in D . Allora si verifica una delle seguenti condizioni

$$\frac{\partial w}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) > 0,$$

dove w non è identicamente nulla.

Dimostrazione. A meno di rotazioni e traslazioni, sia $T = \{x_1 = 0\}$, $K_1 = B_{r_1}(0)$ tangente internamente a ∂D^* in $Q \in T \cap \partial D^*$. Sia inoltre $K_2 = B_{r_2}(Q)$, dove $r_2 = \frac{1}{2}r_1$, e $K' = K_1 \cap K_2$.



Definiamo ora

$$z(x) = x_1 \left(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r_1^2} \right),$$

e osserviamo che

- $z = 0$ in ∂K_1 e T ;
- $z > 0$ in K' .

L'obiettivo iniziale è fissare un certo α tale che $\Delta z > 0$ in K' . Per fare ciò, calcoliamo

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r_1^2} - 2\alpha x_1^2 e^{-\alpha|x|^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} &= -6\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2 x_1^3 e^{-\alpha|x|^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_i} &= -2\alpha x_1 x_i e^{-\alpha|x|^2} \quad \text{dove } i = 2, \dots, n, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} &= -2\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2 x_1 x_i^2 e^{-\alpha|x|^2} \quad \text{dove } i = 2, \dots, n,\end{aligned}$$

trovando che

$$\Delta z = 2\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2} (2\alpha|x|^2 - (n+2)).$$

Scegliendo $\alpha = (n+2)r_1^{-2}$, otteniamo $\Delta z > 0$ in K' . Siccome $\Delta w \leq 0$ e $w \geq 0$ in D , per il Teorema 1.10 si deduce che $w > 0$ in D . Inoltre, osserviamo che

- $w \geq \varepsilon x_1$ su $\partial K' \cap \partial K_2$ per qualche $\varepsilon > 0$;
infatti, scegliendo

$$\varepsilon := \inf_{\substack{(x_1, \dots, x_n) \in \partial K' \cap \partial K_2 \\ x_1 \neq 0}} \frac{w(x_1, \dots, x_n)}{x_1}$$

si ha che $w \geq 0$ se $x_1 = 0$, cioè su $\partial K' \cap \partial K_2 \cap T$, e

$$\varepsilon x_1 < \frac{w(x_1, \dots, x_n)}{x_1} x_1 = w(x_1, \dots, x_n) \quad \text{su } \partial K' \cap \partial K_2 \setminus T;$$

- $w \geq 0$ su $\partial K' \cap \partial K_1$ e $\partial K' \cap T$;
- $z \leq x_1$ on $\partial K' \cap \partial K_2$;
- $z > 0$ in K' .

Di conseguenza,

- $w - \varepsilon z \geq 0$ su $\partial K' \cap \partial K_2$;
- $w - \varepsilon z = w \geq 0$ su $\partial K' \cap \partial K_1$ e $\partial K' \cap T$.

Quindi $w - \varepsilon z \geq 0$ in $\partial K'$ e $(w - \varepsilon z)(Q) = 0$. In aggiunta,

$$\Delta(w - \varepsilon z) = \Delta w - \varepsilon \Delta z < 0 \quad \text{in } K',$$

e, sempre per il Principio del Massimo, $w - \varepsilon z > 0$ in K' . Conseguentemente, una di queste due condizioni deve essere soddisfatta

$$\frac{\partial(w - \varepsilon z)}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2(w - \varepsilon z)}{\partial s^2}(Q) \geq 0,$$

poiché,

- se $\frac{\partial(w - \varepsilon z)}{\partial s}(Q) < 0$ allora $w - \varepsilon z < 0$ in $K' \cap I_Q$
- se $\frac{\partial(w - \varepsilon z)}{\partial s}(Q) = 0$ e $\frac{\partial^2(w - \varepsilon z)}{\partial s^2}(Q) < 0$
allora $w - \varepsilon z < 0$ in $K' \cap I_Q$.

Verifichiamo ora che

$$\frac{\partial z}{\partial s}(Q) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(Q) > 0.$$

Calcoliamo, per $i = 2, \dots, n$

$$\nabla z = \left(e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha r_1^2} - 2\alpha x_1^2 e^{-\alpha|x|^2}, -2\alpha x_1 x_i e^{-\alpha|x|^2} \right),$$

perciò $\nabla z(Q) = 0$ e, di conseguenza,

$$\frac{\partial z}{\partial s}(Q) = \nabla z(Q) \cdot s = 0.$$

Possiamo affermare quindi che, se si verifica

$$\frac{\partial(w - \varepsilon z)}{\partial s}(Q) > 0 \quad \text{allora} \quad \frac{\partial w}{\partial s}(Q) > \varepsilon \frac{\partial z}{\partial s}(Q) = 0.$$

Calcoliamo ora $D^2 z(Q)$. Presi $i, j = 2, \dots, n$ con $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} = -6\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2 x_1^3 e^{-\alpha|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(Q) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = -2\alpha x_1 e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2 x_1 x_i^2 e^{-\alpha|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}(Q) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_1} = -2\alpha x_i e^{-\alpha|x|^2} + 4\alpha^2 x_1^2 x_i e^{-\alpha|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}(Q) = -2\alpha q_i e^{-\alpha r_1^2}$$

che sarà non nullo per qualche i ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = 4\alpha^2 x_1 x_i x_j e^{-\alpha|x|^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}(Q) = 0$$

Questo implica che

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(Q) = D^2 z(Q) s^t \cdot s = -4\alpha s_1 e^{-\alpha r_1^2} \sum_{i=2}^n q_i s_i > 0,$$

e infine

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}(Q) \geq \varepsilon \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}(Q) > 0.$$

□

BIBLIOGRAFIA

- [1] Adimurthi and G. Mancini, *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, in *Nonlinear analysis*, 9–25, Scuola Normale Superiore, Pisa; MR1205370.
- [2] H. Berestycki and L. Nirenberg, *On the method of moving planes and the sliding method*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) **22** (1991), no. 1, 1–37; MR1159383.
- [3] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S. R. S. Varadhan, *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 1, 47–92; MR1258192.
- [4] M. Berger, *Geometry II*, Springer, Berlin, 2nd ed., 1987.
- [5] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, Chelsea, New York, 1949.
- [6] X. Cabré, *On the Alexandroff–Bakelman–Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 5, 539–570; MR1329831.
- [7] X. Cabré, X. Ros-Oton, and J. Serra, *Sharp isoperimetric inequalities via the ABP method*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18** (2016), no. 12, 2971–2998; MR3576542.
- [8] B. Gidas, W.-M. Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243; MR0544879.
- [9] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2001 (reprint of the 1998 edition); MR1814364.
- [10] M. Grossi and R. Molle, *On the shape of the solutions of some semilinear elliptic problems*, Commun. Contemp. Math. **5** (2003), no. 1, 85–99; MR1958020.
- [11] M. G. Kreĭn and M. A. Rutman, *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space*, Uspekhi Mat. Nauk **3** (1948), no. 1, 3–95.

- [12] M. Lewicka and Y. Peres, *Equivalence of the supporting spheres condition and the $C^{1,1}$ regularity of the boundary*, **Preprint**.
- [13] V. Vevey Modugno, *Il teorema isoperimetrico nel piano euclideo*, Tesi di Laurea Triennale in Matematica, Università di Roma Tre, 2022.
- [14] J. B. Serrin, *A symmetry problem in potential theory*, Arch. Rational Mech. Anal. **43** (1971), 304–318; MR0333220.
- [15] M. Struwe, *Variational methods*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3rd series, vol. 34, Springer, Berlin, 3rd ed., 2000; MR1736116.
- [16] H. C. Wang, *Multiple solutions in a dumbbell domain*, Matimyás Mat. **30** (2007), no. 2–3, 142–152; MR2584485.

**Advanced Topics in Pure and Applied Mathematics:
Doctoral Lecture Series**

1. M. Trombetti, *Non-Abelian Groups with Many Abelian Subgroups* (2025)
2. D. Castorina, F. Cassanello, M. Casula & A. Columbu, *Il metodo di Alexandrov-Bakelman-Pucci e le sue applicazioni* (2026)

This volume is based on the content of the Ph.D. course entitled “The Alexandrov-Bakelman-Pucci method and its applications” held in the second semester of the academic year 2023-2024, at the Department of Mathematics and Applications “Renato Caccioppoli” of the University of Naples Federico II by Professor Daniele Castorina, and repeated in July 2025 at the Department of Mathematics and Computer Science of the University of Cagliari and followed by the students Filippo Cassanello, Marco Casula and Alessandro Columbu who reported the contents in this text.

Daniele Castorina is Associate Professor of Mathematical Analysis at the Department of Mathematics and Applications “Renato Caccioppoli” of the University of Naples Federico II. His research interests focus mainly on Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. After graduating cum laude from Roma Tre University and being awarded his Ph.D. in Mathematics at Roma “La Sapienza” University, he has been Lecturer in Mathematics at John Cabot University of Rome and has held several Post Doc positions in various universities such as Padua, Rome Tor Vergata, Autonomous University of Barcelona and Perugia.

ISBN: 978-88-6887-441-4

